C1692

Bqe ENS Cachan – ENSAI D2
Eco-Gestion Option 1

____

Concours ENS Cachan – Economie Gestion option I
Concours ENSAI – option économie et gestion

____

Session 2016

____

Composition de Mathématiques et de Statistiques

____

Durée : 4 heures

____

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de toute calculatrice est interdit.

Le sujet comporte 4 pages et 3 problèmes indépendants.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-es à prendre.

Problème 1

Soient les deux applications linéaires suivantes :

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (2z_1 - z_3, 3z_1 + z_2 + 2z_3)$$
$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2, -z_2, 2z_1 - z_2)$$

1. Déterminez H la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminez K la matrice de v dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminez le noyau de u. u est-elle injective ?
4. Déterminez l'image de u. u est-elle surjective ?
5. Calculez HK.
6. Montrez que $(HK)^2 = \lambda \times I_2$ où I_2 est la matrice identité de dimension 2 et λ est un scalaire (appartenant à $\mathbb{R}$) à déterminer.
7. En déduire sans (long) calcul que HK est inversible.
8. Déterminez $(u \circ v)^2$.

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction à valeurs réelles telle que $f(x, y) = x^3 + y^3$.

On souhaite déterminer les extrema de f sur l'ensemble :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

1. Posez le Lagrangien $L(x, y, \mu)$ du programme, où μ est un multiplicateur de Lagrange.
2. Posez la condition de qualification de la contrainte.
3. Déterminez le gradient du Lagrangien.
4. Quels sont les deux points critiques associés à $\mu = \frac{3}{2}$?
5. Quels sont les deux points critiques associés à $\mu = -\frac{3}{2}$?
6. Déterminez les deux autres points critiques.
7. Déterminez la Hessienne bordée.
8. Montrez que le programme admet trois minima locaux.
9. Montrez que le programme admet trois maxima locaux.

Problème 3

Première partie

Soit $(a,b) \in]0;1[^2$ vérifiant $a+b<1$. Soit X une variable aléatoire discrète dont la distribution est donnée par :

$$X = \begin{cases} 1, & \text{avec probabilité } a \\ 0, & \text{avec probabilité } 1-(a+b) \\ -1, & \text{avec probabilité } b \end{cases}$$

1. Calculez l'espérance de X.
2. On pose $Y = X^2$.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   (b) Calculez l'espérance de Y.
   (c) Combien vaut la variance de X ?
   (d) Calculez la variance de Y.
   (e) Quelle est la loi de $P = \frac{Y+X}{2}$?
   (f) Quelle est la loi de $M = \frac{Y-X}{2}$?
3. Calculez
   (a) $\mathbb{P}(X=1/Y=1)$,
   (b) $\mathbb{P}(Y=1/X=1)$,
   (c) $\mathbb{P}(P=M)$,
   (d) $\mathbb{P}(PM=0)$.
4. (a) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'égalité

$$\mathbb{P}(X=1/Y=1) \;=\; \mathbb{P}(X=0/P=0) \text{ ?} \tag{4a}$$

   Représentez l'ensemble des solutions dans un plan cartésien.

   (b) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'égalité

$$\mathbb{P}(X=-1/Y=1) \;=\; \mathbb{P}(X=0/M=0) \text{ ?} \tag{4b}$$

   Représentez l'ensemble des solutions sur le graphique précédent.

   (c) Les deux équations (4a) et (4b) peuvent-elles être simultanément vérifiées ?

Deuxième partie

On tire $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X et, pour chaque tirage X_i, on définit les variables Y_i, P_i et M_i comme précédemment.

5. On pose $S_P = \sum_{i=1}^{n} P_i$.
   (a) Montrez que S_P donne le nombre de tirages X_i égaux à 1.
   (b) Quelle est la loi de S_P ?
   (c) On estime a par $\hat{a}_1 = \frac{S_P}{n}$. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_1$.

6. On suppose désormais que $a = b$.
   (a) Montrez que $a < \frac{1}{2}$.
   (b) On pose $S_M = \sum_{i=1}^{n} M_i$.
      i. Pourquoi peut-on estimer a par $\hat{a}_0 = \frac{S_M}{n}$?
      ii. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_0$.
   (c) Pour $t \in]0;1[$, on pose $\hat{a}_t = t\hat{a}_1 + (1-t)\hat{a}_0$.
      i. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_t$.
      ii. Pour quelle valeur de $t^* \in]0;1[$, a-t-on une variance minimale ?
   (d) Quel est le meilleur estimateur de a : $\hat{a}_1$, $\hat{a}_0$ ou $\hat{a}_{t^*}$?
   (e) Montrez que
$$\hat{a}_{t^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{2n}.$$