C1792

Ecole Normale Supérieure de Cachan
61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **1$^{\text{ere}}$ année**
Economie et Gestion
Session 2017

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 pages et 3 problèmes indépendants.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Problème 1

Soient $v_1 = 3e_1 - 2e_2$ et $v_2 = -e_1 + e_2$ où e_1 et e_2 sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. (a) Les vecteurs (v_1, v_2) forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?
   (b) Exprimez e_1 et e_2 en fonction de v_1 et v_2.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, l'application définie par $g(v_1) = v_1$ et $g(v_2) = -v_2$
   (a) Quelle est la matrice M de g dans la base (v_1, v_2) ?
   (b) Calculez M^2. Que peut-on dire de $g \circ g$?
   (c) Déterminez la matrice A de g dans la base (e_1, e_2).
   (d) Calculez A^2.
3. On note $<;>$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et $||.||$ la norme associée. Pour $v \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(v) = \dfrac{< v; v_1 >}{||v_1||^2} v_1$.
   (a) Exprimez $f(v)$ en fonction des coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de v.
   (b) Donnez sa matrice F dans la base canonique.
   (c) Calculez F^2.

Problème 2

On s'intéresse à l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^6 + y^6 = 1$, et l'on souhaite déterminer le ou les points les plus proches de l'origine au sens de la distance euclidienne.

Ce problème peut se modéliser comme la minimisation sous contrainte d'une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Quelle est l'expression de la fonction $f(x, y)$?
2. Posez le Lagrangien $L(x, y, \lambda)$ du programme, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un multiplicateur de Lagrange.
3. Déterminez le gradient du Lagrangien.
4. Montrez qu'il existe deux valeurs du multiplicateur vérifiant les conditions du premier ordre. On les notera λ_1 et λ_2, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
5. Déterminez les points critiques associés au multiplicateur λ_1.
6. Déterminez les points critiques associés au multiplicateur λ_2.
7. Montrez qu'aux points critiques associés à λ_1, f prend la même valeur V_1.
8. Montrez qu'aux points critiques associés à λ_2, f prend la même valeur V_2.
9. En déduire le ou les minima recherchés, s'ils existent.

Problème 3

1. Soit $x \in]0;1[$ et n un entier naturel.
   (a) Montrez que $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$.
   (b) En déduire que lorsque n tend vers l'infini, $\sum_{k=0}^{n} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-x}$.
   (c) Montrez de même que $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(1-x)^2}$.

   On pose alors $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. On dispose de deux dés : l'un des dés est pipé de façon à ce qu'on tire toujours la face 6, l'autre est équilibré (chaque face à une probabilité $\frac{1}{6}$). Pour identifier le dé pipé, on emploie la méthode suivante : on lance les deux dés jusqu'à ce qu'on obtienne un tirage différent de 6, ce qui permet de distinguer le dé non pipé du dé pipé. On note I le nombre de tirage nécessaire à l'identification.
   (a) Quelle est la probabilité d'avoir à faire un second tour (et donc $I > 1$) ?
   (b) Quelle est la probabilité que $I = 2$?
   (c) Quelle est la probabilité qu'on identifie le dé pipé au tour k (et donc $I = k$) ?
   (d) Quelle est l'espérance de I ?
3. On suppose ici que les deux dés étaient en fait équilibrés. On suit donc la méthode précédente jusqu'à ce qu'on pense avoir identifié le dé pipé (au tirage $I = k$) ou que l'on s'aperçoive que les deux dés sont non pipés (on note alors $I = 0$ par convention).
   (a) i. Quelle est la probabilité que $I = 1$?
       ii. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que $I = k$?
       iii. En déduire la probabilité que $I = 0$.
       iv. Calculez l'espérance de I.
   (b) i. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que $I = k$ sachant que $I > 0$?
       ii. Vérifiez qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
       iii. Calculez l'espérance de cette loi.
       iv. Retrouve-t-on l'espérance calculée en 2.(d) ?

Fin de l'épreuve.