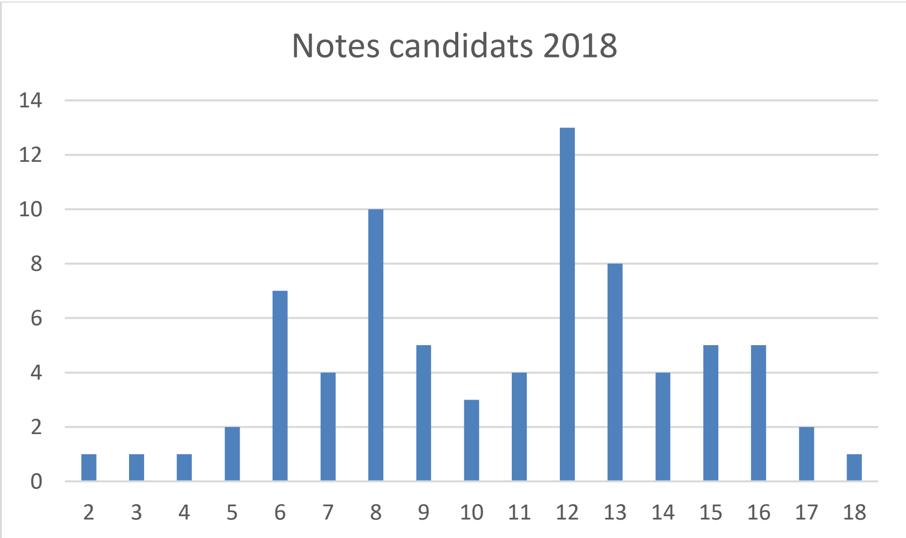
Concours commun ENS Cachan-ENSAI D2 session 2018
Oral spécifique ENSAI de Mathématiques
Rapport du jury

Les modalités de l'épreuve orale de mathématiques spécifique à l'ENSAI dans le concours commun Cachan-ENSAI D2 n'ont pas changé cette année. L'interrogation se déroule de la manière suivante : une demi-heure de préparation puis une demi-heure de passage, dont la plus grande partie (environ 20 minutes) est consacrée à l'exercice préparé par le candidat ; le jury propose ensuite un exercice simple portant sur un autre sujet que le candidat doit traiter sans préparation.

Pour cette session 2018, 106 candidats étaient admissibles et convoqués à l'épreuve orale de mathématiques, 76 se sont présentés, ce qui constitue, par rapport à l'an passé, une quasi-stabilité du nombre de candidats admissibles (105 en 2017) et du nombre de candidats présents à l'oral de mathématiques (78 en 2017). Les oraux se sont déroulés du 11 au 15 juin dans les locaux de l'ENS Cachan.

Comme pour les sessions des trois années précédentes, les deux interrogateurs ont posé chaque exercice simultanément et trois fois de suite au maximum, de sorte que chacun de ceux-ci a été proposé entre une et six fois. Ainsi, ce sont 20 planches d'exercices qui ont été utilisées pour les 76 candidats présents. Par ailleurs, les deux interrogateurs ont appliqué la même règle pour les exercices complémentaires, soit également 20 exercices utilisés. Cette manière de procéder a permis au jury d'effectuer des comparaisons homogènes entre les candidats. Comme annoncé dans les rapports des années antérieures, le « stock » de planches d'exercices a été renouvelé par rapport à la session précédente. Il le sera de nouveau et intégralement l'an prochain.

Les notes s'étalent de 2 à 18 ; la moyenne est de 10,67 et l'écart-type de 3,68.



La moyenne est supérieure cette année de 0,12 point par rapport à celle de la session 2017. L'écart-type progresse quant à lui de 0,37 point par rapport à 2017. Ces légères augmentations ne sont guère significatives et ne permettent pas de tirer des enseignements autres qu'une relative stabilité des résultats.

Pour l'essentiel, les remarques faites dans les rapports des concours précédents restent d'actualité. Nous invitons donc les futurs candidats à les consulter. Ils contiennent un certain nombre d'éléments et de conseils issus des constatations faites en interrogeant les candidats.

Nous complétons de nouveau ces remarques par des commentaires spécifiques consécutifs aux observations effectuées durant la session 2018. Nous espérons qu'ils seront utiles aux préparationnaires des années à venir.

L'étendue des notes (de 2 à 18) confirme la constatation faite par les examinateurs d'un spectre large de candidats allant de celui qui se présente en affirmant carrément ne pas avoir consacré de temps aux mathématiques à de très bons étudiants, maîtrisant les connaissances et faisant preuve d'une réelle aisance à l'oral.

Un trop grand nombre de candidats ne connaissent pas bien leur cours, en particulier en algèbre et en probabilités. Par exemple, si les espérances des lois usuelles sont globalement sues, les variances sont très rarement citées et certains candidats font comme s'ils n'avaient pas lu correctement l'énoncé, espérant à tort que l'examinateur ne remarquera pas l'impasse. Que les futurs candidats se disent bien que l'absence de question par l'examinateur sur le sujet à la reprise, ne veut pas dire qu'ils ne seront pas sanctionnés. Par ailleurs, malgré nos avertissements récurrents dans les précédents rapports, l'utilisation du déterminant pour chercher les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme reste un réflexe que nous déplorons car il tente de masquer le plus souvent un manque de recul et de réflexion.

Les candidats ne lisent pas toujours l'énoncé avec une attention suffisante : quand celui-ci propose de faire une récurrence sur i, il est malvenu de tenter une récurrence sur n ; quand une indication est donnée pour un calcul d'intégrale, il n'est pas conseillé de l'entreprendre par un autre procédé.

Les raisonnements par récurrence sont souvent malmenés. Les candidats devraient penser à faire l'initialisation à la plus petite valeur pour laquelle la propriété doit être démontrée, et non à une valeur inférieure pour laquelle le résultat pourrait être faux (par exemple, si B est une matrice, $B^n = \lambda^{n-1}B$ est généralement faux pour $n = 0$) ou à une valeur supérieure car alors on n'a pas démontré tout ce qui est demandé. Il convient aussi de faire attention aux récurrences d'ordre 2, par exemple pour montrer qu'une suite vérifiant $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ est majorée par 2 ; il faut penser à initialiser sur deux rangs successifs et non seulement sur le premier. Enfin, il ne faut pas oublier de conclure après avoir établi l'hérédité de la propriété à démontrer.

Le jury souhaite attirer l'attention des préparationnaires sur une tendance nouvelle observée cette année chez certains candidats, encore peu nombreux, heureusement. Cette tendance consiste à ne pas écouter les remarques de l'examinateur, à poursuivre son raisonnement sans tenir compte des observations du jury. Il est même arrivé à plusieurs reprises qu'un candidat ne réponde pas à la question que l'examinateur lui pose, comme s'il ne l'avait pas entendue. Une telle stratégie d'évitement est naturellement très mauvaise, d'autant plus que ce phénomène s'accompagne parfois d'une attitude agressive à l'égard du jury, lorsque celui-ci insiste pour obtenir une réponse. Certains candidats semblent ne pas supporter d'être repris et s'entêtent dans leur vision, refusant de se remettre en question, n'imaginant pas qu'ils puissent être dans l'erreur. Le jury tient à rappeler avec force qu'une préparation qui n'a pas abouti, une présentation erronée de la solution de l'exercice ne sont pas automatiquement synonymes de mauvaise note. Un candidat réactif, à l'écoute de l'examinateur, qui montre qu'il sait réfléchir et qui se bat pour avancer dans l'exercice, obtiendra une bonne note, voire une très bonne note, même si sa préparation n'a rien donné. A l'inverse, un étudiant qui refuse de remettre en cause ses méthodes et contredit de manière frontale le jury, sans montrer le moindre doute sur sa manière de faire, ne pourra s'attirer la bienveillance de ce dernier.

Enfin, nous tenons à rappeler une nouvelle fois, l'importance de la gestion du tableau lors du passage devant l'examinateur. Certains candidats écrivent de manière quasi-aléatoire sur le tableau, d'autres se cantonnent à une petite surface, laissant des pans entiers vierges et effaçant aussitôt ce qu'ils viennent d'écrire. Ce sont souvent les mêmes qui rédigent sans souci de rigueur, oubliant par exemple les équivalences ou confondant ces dernières avec les implications.

Quelques remarques par domaine :

Algèbre

Attention aux manipulations hasardeuses de la notion de famille libre : la réunion de deux familles libres n'en est pas nécessairement une. Il faut savoir prouver qu'une famille est libre, notamment en prouvant qu'une combinaison linéaire nulle a ses coefficients tous nuls. Si certains vecteurs sont les images d'autres par une application linéaire, il est souvent utile de prendre l'image de cette combinaison linéaire par cette application. Il faut savoir ensuite combiner les équations obtenues en éliminant progressivement des vecteurs, comme dans la méthode du pivot pour des systèmes linéaires.

Les candidats devraient penser plus souvent à l'emploi du théorème de la base incomplète quand on dispose d'une famille libre et qu'on cherche une base qui la contient.

Les calculs demandés avec les matrices, comme par exemple $(I_n + A)(I_n + \mu A)$, peuvent généralement être menés à bien de manière globale sans revenir à leur écriture sous forme de tableau à n lignes et n colonnes. Le choix du vocabulaire a son importance : il y a souvent eu confusion entre ordre et rang d'une matrice ainsi qu'entre rang et cardinal d'une famille de vecteurs.

Les candidats devraient savoir démontrer l'inclusion d'un sous-espace vectoriel dans un autre dans les cas simples, par exemple celle de $\mathrm{Im}(f + g)$ dans $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$. Le fait qu'un sous-espace vectoriel de même dimension que l'espace dans lequel il est contenu lui est égal devrait être immédiatement mentionné.

Les candidats doivent connaître et utiliser le fait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe, et savoir comment on dit en cinq lettres « sous-espace propre pour la valeur propre zéro ». Il y a parfois eu confusion entre polynôme caractéristique et polynôme annulateur. Il convient par ailleurs de savoir démontrer par exemple que si $f^2 = \lambda f$ alors les deux seules valeurs propres possibles pour f sont 0 et λ, et surtout ne pas oublier d'examiner ensuite si elles le sont effectivement.

Analyse

Nous conseillons aux candidats d'être vigilants dans les calculs avec les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances : il arrive qu'un candidat écrive $(\exp(x))^n = \exp(x^n)$ ou d'autres égalités de ce genre résultant généralement d'un manque de vigilance.

Pour calculer la dérivée d'une fonction en un point particulier, il convient de connaître la définition du nombre dérivé, et de savoir l'utiliser correctement. Prendre la limite de la dérivée peut se justifier, à condition de dire qu'on utilise le théorème éponyme et que la fonction considérée soit déjà continue en ce point. D'autre part, avant tout calcul de fonction dérivée, il est impératif de justifier que la fonction dont on cherche la dérivée est effectivement dérivable et préciser sur quel ensemble.

Concernant la notion de suites équivalentes, il convient de rappeler que deux suites équivalentes ne sont pas deux suites qui ont la même limite. Rappelons également qu'il n'est pas autorisé de prendre l'exponentielle ou le logarithme d'équivalents ; toutefois les candidats doivent savoir démontrer par exemple que $\ln(n+1)$ est équivalent à $\ln n$ en utilisant la formule $\ln(a+b) = \ln a + \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$ pour a et b réels strictement positifs.

Les candidats ont souvent des difficultés à encadrer une intégrale. Pour cela on encadre la fonction intégrée suivant les situations : soit on l'encadre par son minimum et son maximum (cas de $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$), soit on majore le numérateur et/ou on minore le dénominateur de façon pertinente en vue de l'objectif visé. Ainsi par exemple, pour prouver que $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt$ tend vers 0, on majore $\frac{t^n}{1+t^n}$ par t^n et non par 1. Il n'y a pas équivalence entre l'encadrement de la fonction et celui de l'intégrale mais seulement une implication, et il faut justifier une inégalité stricte entre intégrales par l'inégalité stricte en au moins un point entre les fonctions ainsi que par la continuité de celles-ci.

Certaines fonctions n'admettent pas de primitive s'exprimant à l'aide des fonctions usuelles, notamment $\exp(-x^2)$, et il convient d'y prendre garde, notamment lors d'une intégration par parties pour laquelle il est utile de réserver un facteur x afin de permettre sa primitivation.

Le jury a noté de fréquentes confusions entre la relation de Chasles et la linéarité dans les noms des propriétés des intégrales utilisées dans les exercices.

Probabilités

Les différents types de dénombrements sont mal connus : nombre de choix ordonnés ou non ordonnés, avec ou sans répétition. Il faut veiller à ne pas utiliser les choix non ordonnés avec répétition dans le calcul de probabilités. La formule de Pascal servant à construire le triangle du même nom peut être utilisée sans être redémontrée, il est utile de la connaître ; ce qui ne semblait pas être le cas de certains candidats.

Les lois de probabilité de variables aléatoires ne sont pas toujours reconnues correctement. On peut souvent vérifier la vraisemblance par des raisonnements simples. Ainsi, le nombre de tirages donnant une boule d'une certaine couleur dans une succession en nombre donné de tirages sans remise ne peut suivre une loi géométrique car il est nécessairement majoré par le nombre de tirages.

La variance n'est pas linéaire comme l'est l'espérance, et l'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances, que ces variables aléatoires soient ou non indépendantes. Il convient d'être prudent quand on affirme l'indépendance d'évènements ou de variables aléatoires, celle-ci résulte généralement des conditions de l'expérience et ne se justifie que quand celle-ci consiste clairement en une succession d'épreuves sans lien entre elles, comme le tirage de boules avec remise, les lancers successifs d'un dé, etc.

La formule des probabilités totales n'est pas toujours justifiée (conditionnement par les évènements d'un système complet) et est parfois incorrecte (oubli des probabilités de ces évènements). Nous avons noté des confusions entre *formule des probabilités totales*, *formule des probabilités composées* et *formule des probabilités conditionnelles*. Par ailleurs, une probabilité plus grande que 1 doit immédiatement faire réagir le candidat qui doit reconnaître qu'il a commis une erreur quelque part. Le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire dont on connaît toutes les lois conditionnées par un système complet d'évènements gagne généralement à être effectué en utilisant les espérances de ces lois.

Dans les intégrales de densités de variables aléatoires, le choix des bornes est souvent hasardeux. Si les deux bornes doivent être infinies dans la définition d'une densité et la formule pour l'espérance, elles se restreignent au support de la densité quand on passe au calcul. Pour une fonction de répartition, la borne supérieure est la variable, et la variable d'intégration doit porter un autre nom.

Pour conclure et comme chaque année, nous encourageons vivement les futurs candidats à s'entraîner. Pour cela, nous publions infra, six planches (deux d'analyse, deux d'algèbre et deux de probabilités).

On définit la fonction réelle de variable réelle f sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

   b. Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

   a. Exprimer v_n à l'aide de u_n seulement.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $2 < v_n \leq 2 + \dfrac{1}{n}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on a : $2(n+1) \leq \dfrac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ ..

4. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on a : $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1} \frac{dt}{t} + 1$.

   b. Donner un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exemple de planche 2

Soit f la fonction réelle de variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \exp\left(x - \frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0, \quad \text{et } f(0) = 0.$$

On note C la courbe représentative de f en repère orthonormé.

1. a. Donner les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 0_+ et en 0_- .
   b. Montrer que f est continue à droite en 0.
2. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer sa dérivée.
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0 à droite.
   c. Donner le tableau de variations de f.
3. Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C ?
4. Tracer C.
5. a. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ admet une réciproque g.
   b. Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que C.
   c. Donner une expression de g à l'aide des fonctions usuelles.

Soit n un entier au moins égal à 2. Soients $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne d'ordre n

et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ une matrice ligne d'ordre n. On suppose que a_1 et b_1 sont non nuls.

1. Calculer AB et BA. Quel est le rang de AB ?

On identifiera désormais la matrice $BA = (\ \lambda\ )$ à une ligne et une colonne au nombre réel λ.

2. Montrer que $(AB)^2 = \lambda AB$.

3. Montrer que les seules valeurs propres de AB sont 0 et λ. On pourra se donner un vecteur propre X de AB et calculer $(AB)^2 X$ de deux manières différentes en utilisant le 2°.

4. Soit μ un nombre réel fixé : calculer $(I_n + AB)(I_n + \mu AB)$.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur λ pour que $I_n + AB$ soit inversible, et dans ce cas exprimer son inverse à l'aide de I_n , A et B.

6. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur λ pour que AB soit diagonalisable, et dans ce cas la diagonaliser.

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, et soit h un endomorphisme de E tel que $h^2 = h \circ h = -Id_E$; autrement dit, pour tout $x \in E$ on a $h^2(x) = -x$.

1. a. Montrer que h est un automorphisme de E ; quelle est sa réciproque ?
   b. Montrer que si $x \in E$ et $\lambda \in$ $\lambda \in \mathbb{R}$ sont tels que $h(x) = \lambda x$ alors $h^2(x) = \lambda^2 x$.
   c. Montrer que h n'admet pas de valeur propre réelle.
2. Soit c un vecteur non nul de E ; on pose $d = h(c)$.
   a. Montrer que la famille (c, d) est une base de E.
   b. Montrer que la matrice de h dans cette base est $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, et soit h un endomorphisme de E tel que $h^2 = h \circ h = -Id_E$. Soit c un vecteur non nul de E ; on pose $d = h(c)$: alors vu ce qui précède, la famille (c, d) est une famille libre de E.

Soit u un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(c, d)$; on pose $v = h(u)$. Montrer que la famille (c, d, u, v) est une base de E. Quelle est la matrice de h dans cette base ?

On considère n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, l'urne numérotée j contient $j - 1$ boules blanches et une boule noire. On effectue l'épreuve suivante : on choisit une urne au hasard, puis on effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans cette urne jusqu'à ce qu'on tire la boule noire. On désigne par X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie, et par Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires pour obtenir une boule noire pour la première fois.

1. a. Reconnaître la loi suivie par X, donner son espérance et sa variance.

2. a. Reconnaître la loi de Y conditionnée par $(X = 1)$, donner son espérance et sa variance.

   b. Reconnaître la loi de Y conditionnée par $(X = j)$ pour $j \in \{2, \dots, n\}$ fixé, donner son espérance et sa variance.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $P(Y = k)$ sous forme d'une somme finie.

4. On rappelle que si $(C_1, \dots, C_n)$ est un système complet d'évènements et Y une variable aléatoire dont on connaît les espérances $E_i(Y)$ conditionnées par C_i, alors l'espérance de Y est donnée par la formule : $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E_i(Y)\,P(C_i)$. Calculer l'espérance de Y.

On rappelle que pour tout n ≥ 2, une primitive de $\dfrac{1}{x^n}$ *est* $-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$.

1. On pose $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^4}$, $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,dt}{(1+t)^4}$, $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t)^4}$.
   a. Montrer que les intégrales définissant I, J et K sont convergentes.
   b. Montrer que l'on a : $I=\dfrac{1}{3}$, $I+J=\dfrac{1}{2}$, $I+2J+K=1$. En déduire les valeurs de J et K.
2. On définit la fonction f par : $f(t)=\dfrac{3}{(1+t)^4}$ si $t>0$, $f(t)=0$ si $t\le 0$.
   a. Montrer que f est une densité de variable aléatoire X.
   b. Donner la fonction de répartition F de la loi de X.
   c. Montrer que l'espérance de X existe, et la calculer.
   d. Montrer que la variance de X existe, et la calculer.
3. On considère la fonction u définie par $u(x)=\ln x$ si $x>0$, $u(x)=0$ si $x\le 0$, et on pose $Y=u(X)$.
   a. Déterminer la fonction de répartition G, puis la densité g de la loi de Y.
   b. Montrer que l'espérance de Y existe, et la calculer à l'aide d'une intégration par parties.

   On donne : $\dfrac{1}{t(1+t)^3}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{1}{(1+t)^2}-\dfrac{1}{(1+t)^3}$.