Concours $\mathbf{1^{ere}}$ **année**
Economie et Gestion
Session 2019

Mathématiques et Statistiques
Rapport du Jury

Sur 378 candidat·es, 363 ont composé. Les notes s'échelonnent de 0 à 20. La moyenne générale est de 7,6 et l'écart type de 4,7. L'épreuve était constituée de trois problèmes de difficulté comparable, abordant l'algèbre linéaire, l'optimisation et les probabilités (avec un peu de statistiques en fin du problème 3). Le premier problème a été très peu traité, à la différence des deux suivants. Les bonnes copies ont abordé tous les problèmes et traité l'essentiel des questions.
Globalement, on regrette que l'énoncé ne soit pas lu avec plus d'attention. Par exemple, dans le problème 2, certaines questions portaient sur les points vérifiant une contrainte, d'autres sur tous les points de l'ensemble, sans contrainte. Les questions 1c et 3 visaient justement à généraliser l'inégalité obtenue sous contrainte à l'ensemble complet. Malheureusement, les candidat·es ayant compris que la question portait sur cette généralisation sont moins d'une dizaine.

Problème 1

Il s'agissait d'un problème d'algèbre linéaire portant sur une matrice non nulle $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

1) Beaucoup de candidat·es se sont lancé·es dans un calcul de valeur propre à partir de la forme générale d'une matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, sans utiliser l'hypothèse $A^2 = A$, qui donnait un polynôme annulateur de A : $X^2 - X = X(X-1)$ et donc les valeurs propres possibles, 0 et 1.
2) Cette question était un peu délicate, elle reposait sur une indication rarement comprise. On proposait de prendre un vecteur n'appartenant pas au noyau : $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \ker A$. On sait alors que $Ax \neq 0$. Notons y cette image : $y = Ax$. On a alors $Ay = A^2x$ avec $A^2 = A$ par hypothèse, donc $Ay = Ax = y$, on a donc un vecteur propre associé à la valeur 1.
   L'utilisation des dimensions des sous-espaces propres pour démontrer que A est diagonalisable a été mieux traitée, en 2b) comme en 3.
   Nous notons qu'un nombre important d'étudiant·es ne connait pas la définition du noyau d'une application linéaire... Ce qui rend difficile la moindre question d'algèbre linéaire.
4) Cette question a été très peu traitée, il s'agissait de mener une discussion en reprenant les résultats démontrés, c'est-à-dire suivant la dimension du noyau :
   — s'il est de dimension 0, alors $A = Id$ d'après 3 ;
   — s'il est de dimension 1, alors A est diagonalisable donc semblable à la matrice diagonale de valeurs propres 0 et 1 ;
   — enfin la dimension 2 est impossible parce que $A = 0$ est exclu par hypothèse.

Problème 2

Cet exercice d'analyse visait à établir la propriété

$$\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

pour k égal à 2 et 3 et pour des x_i positifs.

1) L'ensemble $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 | x+y = 1\}$ a souvent été pris pour un triangle (reliant les points (0,1), (1,0) et l'origine) alors qu'il s'agit d'un segment (l'hypoténuse de ce triangle). On a, pour x et y dans C,

$$0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y = 1 - 2\sqrt{xy}.$$

On a alors, toujours sur C, :

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Il reste ensuite à généraliser l'inégalité hors de C. On prend deux réels positifs a et b. S'ils sont tous les deux nuls, l'inégalité est évidente. Sinon, on peut les diviser par leur somme et poser $a' = \frac{a}{a+b}$ et $b' = \frac{b}{a+b}$, de sorte que $(a', b') \in C$ donc vérifie l'inégalité. Il suffit ensuite de multiplier par $a + b$. La question 3 se démontrait de la même façon dans $\mathbb{R}^3$.

2) L'optimisation sous contrainte a été globalement bien traitée, mais de façon très mécanique, sans réellement lire l'énoncé. Pour le a), il fallait bien voir que si $x = 0$, $y = 0$ **ou** $z = 0$, alors $f(x; y; z) = 0$, ce qui n'est pas la même chose que $f(0; 0; 0) = 0$. Et ensuite montrer que f prend aussi des valeurs strictement positives dans C, par exemple $f(0,1; 0,1; 0,8) = 0,008 > 0$.

Problème 3

Dans ce problème, il s'agissait d'analyser la forme concours : alors qu'un examen vise à évaluer le niveau, le concours sélectionne les meilleurs résultats. Les différences de résultat à l'écrit entre hommes et femmes, alors que l'anonymat est assuré, peuvent en partie être liées au format du concours lui-même. Il s'agit ici de s'interroger sur la possibilité que le recrutement sur concours sélectionne, en plus des compétences scolaires, sur des dispositions (parfois regroupées dans l'expression « confiance en soi ») qui sont socialement développées de façon différenciée suivant le genre (mais aussi d'autres rapports sociaux).
Sans expliciter l'enjeu en terme de genre dans l'énoncé, on fait l'hypothèse que la population des candidat·es se décompose en candidat·es plus averses au risque (prénoms commençant par A dans l'énoncé, modélisant une sous-population plus féminine) et moins averses au risque (prénoms en B, supposés plus souvent masculins).
On commence avec deux candidat·es, un·e de chaque sous-population, et on montre que leur chance de succès sont identiques.

1) Les calculs de l'espérance et de la variance ne posaient pas de problème, sauf si l'on cherchait à appliquer une formule non adaptée (par exemple celles de la loi uniforme continue). On trouve la même espérance (10) mais des variances différentes : $var(A) = 2/3$ et $var(B) = 2$.

2) On peut construire un arbre ou un tableau de dénombrement. Il y a en tout 15 tirages possibles pour le couple (A, B), tous équiprobables. Pour chaque note n entre 9 et 11, il y a donc une chance sur 15 que $A = B = n$ et donc, par somme de probabilités d'événements disjoints, $\mathbb{P}(A = B) = 3/15 = 1/5$. Ici, comme dans plusieurs autres questions, on est surpris du nombre d'erreurs de simplification des fractions !
Si $B = 10$, l'aléas ne porte que sur A, et B est sélectionnée si $A < B = 10$, ce qui ne laisse que la possibilité $A = 9$ de probabilité 1/3 conditionnellement à $B = 10$.
Ici il faut bien avoir remarqué qu'une candidate n'est retenue que si sa note est strictement supérieure à celle de sa concurrente. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(B > A \text{ et } B = 10) = \mathbb{P}(B > A | B = 10)(B = 10) = \frac{1}{15}.$$

On calcule de même les probabilités que Béa soit sélectionnée avec $B = 8$, avec $B = 9$ (0 dans ces deux cas), avec $B = 11$ (2/15) et $B = 12$ (3/15). On somme les probabilités de ces événements disjoints et on obtient $\mathbb{P}(B > A) = 6/15 = 2/5$.
Alice est sélectionnée s'il n'y a ni égalité ni sélection de Béa :

$$\mathbb{P}(A > B) = 1 - \mathbb{P}(A < B) - \mathbb{P}(A = B) = 1 - 1/5 - 2/5 = 2/5.$$

On a donc la même probabilité de sélectionner la candidate averse au risque ou sa concurrente moins prudente. Les choses changent dès qu'on introduit plus de candidat·es.

3b) On reprend la démarche du 2) mais avec 4 variables aléatoires. Si $B = 12$, alors automatiquement B est supérieure à A et A' qui sont inférieures ou égales à 11. Le seul événement ne conduisant pas à la sélection de Béa est $B' = 12$ (il y a alors des ex-æquo et personne n'est retenu) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Béa sélectionnée} | B = 12) &= (B' < B | B = 12) * (A < B | B = 12) * (A' < B | B = 12)\\ &= 4/5 * 1 * 1 = 4/5\end{aligned}$$

3c) Pour Alice et Aria, la situation est plus simple parce que leurs notes ne peuvent prendre que 3 valeurs, et la note 9 ne peut conduire à une sélection puisque si $A = 9$ alors $A' \geq A$. Finalement, Alice ne peut être sélectionnée qu'avec un 10 ou un 11. On calcule d'abord les probabilités conditionnelles qu'Alice soit sélectionnée avec un 10 puis avec un 11, avant de déconditionner et de sommer. On peut alors faire un arbre de dénombrement dans chacun de ces deux cas.
Pour qu'Alice soit sélectionnée avec un 10, il faut $A' < 10$ (de probabilité 1/3) **et** $B < 10$ (probabilité 2/5) **et** $B' < 10$ (probabilité 2/5), donc $\mathbb{P}(\text{Alice sélectionnée} | A = 10) = 4/75$
Pour qu'Alice soit sélectionnée avec un 11, il faut $A' < 11$ (de probabilité 2/3) **et** $B < 11$ (probabilité 3/5) **et** $B' < 11$ (probabilité 3/5), donc $\mathbb{P}(\text{Alice sélectionnée} | A = 11) = 18/75$.
On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Alice reçue}) &= \sum_{k=9}^{11} \mathbb{P}(\text{Alice reçue} | A = k) * \mathbb{P}(A = k)\\ &= 0 * \frac{1}{3} + \frac{4}{75} * \frac{1}{3} + \frac{18}{75} * \frac{1}{3} = \frac{22}{225}\end{aligned}$$

3d) Par symétrie, on trouve la même probabilité que Aria soit sélectionnée et donc la probabilité que l'une des candidates averse au risque soit sélectionnée est de 44/225.

3e) Ici, il vaut mieux calculer directement la probabilité de cet événement que de chercher à calculer celle de son complémentaire : les cas où personne n'est sélectionné sont nombreux. On fait donc comme pour 3c) et 3d), à partir des 5 valeurs possibles pour B :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Béa reçue}) &= \sum_{k=8}^{12} \mathbb{P}(\text{Béa reçue}|B=k) * \mathbb{P}(B=k)\\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=8}^{12} \mathbb{P}(\text{Béa reçue}|B=k)\\ &= \frac{1}{5}\left(0+0+\frac{2}{5}*\frac{1}{3^2}+\frac{3}{5}*\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{5}\right) = \frac{50}{225}\end{aligned}$$

Par symétrie, la probabilité que Béa ou Bénédicte soit reçue est des $\frac{100}{225} = \frac{4}{9}$. Il y a donc 100 chances sur 225 qu'une candidate non averse au risque soit sélectionnée contre 44 chances sur 225 pour les candidates averses au risque, alors que les espérances de leur note (leur niveau) sont identiques.

Conclusion : en présence d'un concours réellement sélectif, à niveau égal, seul·es les candidat·es prenant des risques ont des chances d'être sélectionné·es. A part pour les candidat·es au niveau particulièrement élevé, les concours ont donc un biais de sélection en défaveur des candidat·es averses au risque, ce qui est peut-être une sous-population plutôt féminine. Ce biais augmente avec la sélectivité du concours et baisse avec le nombre d'épreuves (qui réduit la variance de la note totale).