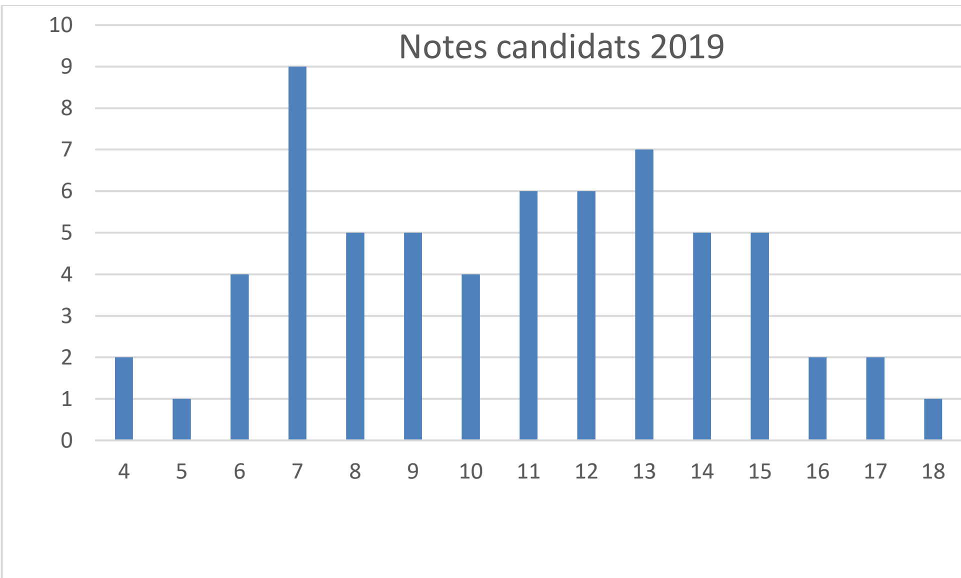
Concours commun ENS Cachan-ENSAI D2 session 2019
Oral spécifique ENSAI de Mathématiques
Rapport du jury

Rappelons, comme chaque année, les modalités de l'épreuve orale de mathématiques spécifique à l'ENSAI dans le concours commun Cachan-ENSAI. L'interrogation se déroule de la manière suivante : une demi-heure de préparation puis une demi-heure de passage, dont la plus grande partie (environ 20 minutes) est consacrée à l'exercice préparé par le candidat ; le jury propose ensuite un exercice simple portant sur un autre sujet que le candidat doit traiter sans préparation.

Pour cette session 2019, 115 candidats étaient admissibles et convoqués à l'épreuve orale de mathématiques, 64 se sont présentés, ce qui constitue, par rapport à l'an passé, une hausse notable du nombre de candidats admissibles (106 en 2018, +8,5%) et paradoxalement, une baisse importante du nombre de candidats présents à l'oral de mathématiques (76 en 2018, −16%) que nous n'expliquons pas. Les oraux se sont déroulés du 4 au 7 juin dans les locaux de l'ENS Cachan.

Comme pour les sessions des quatre années précédentes et selon une règle désormais bien établie, les deux interrogateurs ont posé chaque exercice simultanément et trois fois de suite au maximum, de sorte que chacun de ceux-ci a été proposé entre une et six fois. Ainsi, ce sont 15 planches d'exercices qui ont été utilisées pour les 64 candidats présents. Par ailleurs, les deux interrogateurs ont appliqué la même règle pour les exercices complémentaires. Cette manière de procéder a permis au jury d'effectuer, comme lors des années passées, des comparaisons homogènes entre les candidats. Précisons également que le « stock » de planches d'exercices a été renouvelé par rapport à la session précédente. Il le sera de nouveau et intégralement l'an prochain.

Les notes s'étalent de 4 à 18 ; la moyenne est de 10,67 et l'écart-type de 3,50.



La moyenne est identique à celle de la session 2018. L'écart-type baisse modestement de 0,18 point par rapport à 2018. Pour la deuxième année consécutive, il apparait une stabilité des résultats.

Pour l'essentiel, les remarques faites dans les rapports des concours précédents restent d'actualité. Nous invitons donc les futurs candidats à les consulter. Ils contiennent un certain nombre d'éléments et de conseils issus des constatations faites en interrogeant les candidats, ainsi que des planches d'exercices sur lesquelles les préparationnaires ont tout intérêt à s'entraîner.

Nous complétons ces remarques par des commentaires spécifiques consécutifs aux observations effectuées durant la session 2019.

Si la moyenne des notes est identique à celle de la session 2018 (10,67) et l'écart-type très proche à 3,68 ; il nous a semblé cependant que les candidats cette année faisaient preuve d'une moins bonne connaissance des notions au programme et d'une maîtrise plus fragile des raisonnements mathématiques. Heureusement quelques très bons candidats viennent contredire cette impression et démontrent qu'ils ont les qualités de réflexion et le savoir mathématique que l'on est en droit d'attendre d'un futur étudiant d'une grande école de statistiques.

Cette année, le jury a notamment été surpris d'interroger des candidats capables d'aligner des calculs corrects pour aboutir au résultat demandé, mais incapables de donner des réponses à des questions très simples concernant par exemple l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète suivant une loi de probabilité usuelle (loi uniforme, loi géométrique) ; ou bien de donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Curieusement, des théorèmes importants et des notions élémentaires ne sont pas sus alors qu'un savoir-faire existe ; cet état de fait pose question à l'examinateur qui peut légitimement douter du niveau de compréhension réelle et d'assimilation des connaissances de certains candidats.

Le jury a par ailleurs eu la satisfaction de constater que la tendance observée en 2018 chez plusieurs candidats, consistant à ne pas écouter les remarques de l'examinateur, à poursuivre leur réflexion sans tenir compte des observations, à s'entêter dans une mauvaise voie malgré des relances, ne s'est pas reproduite cette année. L'avertissement donné à ce sujet dans le rapport 2018 a probablement été bien compris.

Enfin, ce rapport 2019 est pour nous l'occasion de faire un focus sur la deuxième partie de l'interrogation, celle où le candidat est amené à résoudre un exercice sans préparation. Ce moment, peut paraître redoutable au candidat parce qu'il doit, en un laps de temps très court, prendre connaissance du sujet, l'analyser, identifier une piste et démarrer sa résolution ; mais il lui permet aussi de montrer l'étendue de ses capacités de réflexion et de réaction. Ce que certains ont fait avec une vraie dextérité, corrigeant parfois avec brio une première impression négative du jury, faisant suite à une résolution laborieuse de l'exercice préparé. La note obtenue est dans ce cas tout à fait honorable et prouve qu'il faut se battre jusqu'au bout de l'interrogation, sans se décourager. Car comme disait Amy Sherald : *« Those who don't quit eventually rise to the top, because the world is full of quitters ».*

Quelques remarques par domaine :

Algèbre

Les candidats ne savent pas en général décrire les notions de noyau, d'image, de sous-espace vectoriel engendré. Ils sont très maladroits dans les calculs avec les endomorphismes et les matrices.

Pour prouver l'inclusion d'un sous-espace vectoriel dans un autre, il n'est pas fréquent de voir le candidat prendre un élément du premier pour établir qu'il appartient au second.

Le recours aux déterminants et au polynôme caractéristique est trop systématique, alors que très généralement les exercices proposés ne le nécessitent pas. Il trahit un manque de réflexion et une volonté de se ramener à des schémas familiers au lieu de construire une réflexion argumentée.

Le théorème du rang est généralement connu et bien utilisé. En revanche, les ne disent pas spontanément qu'un sous-espace vectoriel ayant même dimension que l'espace vectoriel dans lequel il est contenu lui est égal.

Il n'est pas naturel pour les candidats de chercher les sous-espaces propres d'une application linéaire f en écrivant l'égalité $f(x) = \lambda x$. Le fait que les sous-espaces propres sont en somme directe est trop souvent méconnu. Les candidats n'intègrent pas toujours le caractère non nul dans la définition d'un vecteur propre.

Ils confondent parfois le nombre de vecteurs d'une base et le nombre de vecteurs de l'espace vectoriel tout entier, ou parlent *du* vecteur propre associé à une valeur propre donnée.

Les calculs d'image par des endomorphismes définis sur des espaces de polynômes (par exemple : $f : P(X) \longmapsto P(X+1) - XP'(X)$ défini sur $\mathbb{R}_n[X]$) sont très souvent faux, les candidats ne comprennent pas bien la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent dans ce cas.

Analyse

La dérivation des fonctions composées pose souvent problème, notamment les fonctions de la forme $F_X(u(t))$ où F_X est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Justifier qu'une fonction est dérivable avant de calculer sa dérivée est très loin d'être un réflexe. C'est un peu mieux pour la justification de la continuité des fonctions à intégrer.

Les candidats confondent souvent convergence d'une intégrale et convergence d'une suite de réels définis par des intégrales.

Certains ont des difficultés à calculer une somme dont le terme général ne dépend pas de l'indice de sommation, ainsi que l'intégrale d'une fonction qui ne dépend pas de la variable d'intégration. L'oubli de l'élément différentiel dt est dirimant dans cette dernière situation.

Les candidats rencontrent souvent de gros problèmes pour établir des majorations ou minorations d'intégrales, parce qu'ils ne connaissent pas les règles simples permettant celles-ci.

Plusieurs candidats ont affirmé que si la suite de fonctions (f_n) converge vers 0 sur [0, 1], alors la suite de leurs intégrales sur [0, 1] converge vers 0. L'encadrement de f_n en vue de justifier ce résultat est souvent laborieux.

Les candidats connaissent la règle de Riemann pour la convergence d'une intégrale ou d'une série, mais sont peu nombreux à l'utiliser spontanément. Ils raisonnent plus volontiers par équivalence que par négligeabilité, mais ce n'est pas forcément possible avec toutes les fonctions intégrées.

Le fait que la convergence d'une série requiert que son terme général tende vers 0 n'est pas souvent perçu.

Rappelons également que si toute suite admettant une limite finie est bornée, la réciproque est fausse. Penser à $(-1)^n$.

Probabilités

Les lois de variable aléatoire sont souvent méconnues : leur univers, leur expression (probabilité en un point, densité, fonction de répartition), leur espérance et leur variance sont parfois ignorés. La définition de la covariance n'est pas donnée par tous les candidats.

Lorsque c'est le cas, le caractère disjoint des événements est rarement perçu, alors que les candidats prennent naturellement la somme des probabilités d'événements pour calculer la probabilité de leur réunion. Les familles complètes d'événements ne sont pas souvent identifiées.

Les probabilités conditionnelles sont trop souvent prises en lieu et place des probabilités initiales, notamment dans les situations de suites d'expériences non indépendantes comme le tirage de boules sans remise. Dans cette situation, le candidat ne se rend généralement pas compte que le produit des probabilités résulte de la formule des probabilités composées.

Le calcul de la probabilité d'un événement dans le cadre de l'équiprobabilité à l'aide de la formule $\frac{cardinal\ des\ cas\ favorables}{cardinal\ des\ cas\ possibles}$ ne va pas toujours de soi.

La détermination de la loi d'une variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité est un parcours du combattant : la détermination de sa fonction de répartition ne prend pas souvent en compte l'univers de la variable aléatoire initiale ni les limitations dans la définition de sa densité.

Les conditions pour qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire ne sont pas toujours énoncées correctement et en totalité.

Les candidats ont souvent des difficultés à exprimer des événements constitués par des relations entre deux variables aléatoires, comme $(X + Y = n)$ ou $(X = Y)$, à l'aide des évènements $(X = j)$ et $(Y = k)$.

La somme des n premiers entiers naturels $\frac{n(n+1)}{2}$ n'est pas toujours connue et son calcul s'avère laborieux. Quant à la somme des carrés des n premiers entiers naturels $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, elle est presque toujours ignorée.

Pour conclure nous publions infra, trois planches (une d'analyse, une d'algèbre et une de probabilités) sur lesquelles les candidats de la session 2019 ont été interrogés.

Exemple de planche d'analyse

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$ pour tout entier naturel n .

1. **1.** Etudier la monotonie de la suite (I_n) . La suite (I_n) est-elle convergente ?
2. **2.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
3. **3.** Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
4. **4.** En déduire la limite de la suite (nI_n). Donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
5. **5.** Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))$.
6. **6.** En conclure que : $I_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon(n)$ où ε est une fonction vérifiant : $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ sa base canonique $(1, X, X^2)$

On considère l'application f qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad f(P)(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

On pourra écrire : $f(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$.

1) **a)** Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer l'image de f ; f est-il un automorphisme de E ?

a) Préciser le noyau de f.

2) **a)** À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A.

b) f est-elle diagonalisable ? Donner ses sous-espaces propres.

3) Donner une matrice P inversible et une matrice diagonale D vérifiant : $A = P\,D\,P^{-1}$.

Exemple de planche de probabilités

Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t \in]-\infty, 1[$, $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$ si $t \in [1, +\infty[$.

1) Montrer que f est une densité de loi de variable aléatoire X.

2) Déterminer la fonction de répartition F de la loi de X.

3) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires admettant toutes deux f pour densité et indépendantes, autrement dit telles que pour tout couple (x_1 , x_2) de réels, les évènements $(X_1 \leq x_1)$ et $(X_2 \leq x_2)$ sont indépendants.

On définit deux variables aléatoires Y et Z par $Y = \inf(X_1 , X_2)$ et $Z = \sup(X_1 , X_2)$. Soient G et H les fonctions de répartition respectives des lois des variables aléatoires Y et Z.

a) Pour tout réel z, exprimer l'évènement $(Z \leq z)$ à l'aide des variables aléatoires X_1 et X_2 . En déduire que pour tout $z \in$ R on a : $H(z) = (F(z))^2$.

b) Déterminer la densité h de la loi de Z.

c) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

4) **a)** Calculer pour tout réel y la probabilité de l'évènement $(Y > y)$ et en déduire l'expression de $G(y)$ pour tout réel y.

b) Déterminer la densité g de la loi de Y.

c) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.