C1992

Concours d'admission en 1ère année

Filière D2 – Economie et Gestion – Option I

Banque d'épreuves :

- **Concours ENS Paris-Saclay - Option économique et de gestion**
- **Concours ENSAI – option économie et gestion**

Session 2019

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Le sujet comporte 3 problèmes indépendants.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené(e) à prendre.

Problème 1

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$, A non nulle.

1. (a) Soit λ une valeur propre de A. Quelles sont les valeurs possibles pour λ ?
   (b) Montrer que $\ker A = \ker A^2$.
2. On suppose que $\dim \ker A = 1$.
   (a) En prenant $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \ker A$, construire un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
   (b) En déduire que A est diagonalisable et exprimer A dans une base de diagonalisation.
3. On suppose que $\ker A = \{0\}$. Montrer que $A = \mathrm{Id}$.
4. Finalement, décrire toutes les matrices A de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.

Problème 2

1. On pose $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
   (a) Dessiner C dans le plan $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que si $(x, y) \in C$, alors $1 - 2\sqrt{xy} \geq 0$.
   (c) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

On cherche à généraliser l'expression précédente pour trois réels positifs x, y, z.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$. On cherche à maximiser f sous la contrainte

$$C = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\Big\}.$$

   (a) Pourquoi le maximum de f est-il atteint pour $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$?
   (b) Écrire le lagrangien $L(x, y, z, \lambda)$ associé au problème sous contrainte où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un multiplicateur de Lagrange.
   (c) Calculer le gradient de L.
   (d) Déterminer les conditions du premier ordre.
   (e) En déduire que le maximum de f sous la contrainte C est atteint pour $x = y = z$.
   (f) Quelle est la valeur de ce maximum ?
3. Soient maintenant x, y, z trois réels positifs. Montrer que

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

Problème 3

Deux candidates, Alice et Béa se présentent à un concours, la première étant plus averse au risque. On pose A et B leurs notes respectives et on modélise l'aversion au risque de la façon suivante :

— A suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble $[|9;11|]$ (probabilité $\frac{1}{3}$ pour chaque valeur),

— B suit aussi une loi uniforme discrète mais sur l'ensemble $[|8;12|]$ (probabilité $\frac{1}{5}$ pour chaque valeur).

— A et B sont indépendantes.

1. (a) Calculer les espérances des variables A et B.
   (b) Calculer leurs variances.
2. Le concours retient la candidate ayant la meilleure note. En cas d'égalité, personne n'est sélectionné.
   (a) Quelle est la probabilité que $A = B$?
   (b) Conditionnellement à $B = 10$, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?
   (c) Dans le cas général, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?
   (d) Quelle est la probabilité qu'Alice soit sélectionnée ?

On suppose désormais qu'il y a deux candidates supplémentaires, Aria et Bénédicte, mais toujours une seule place au concours. Aria est averse au risque comme Alice, sa note A' est donc de même loi que A ; la note B' de Bénédicte est de même loi que B. Les notes sont toutes supposées indépendantes les unes des autres.

3. (a) Quelle est la probabilité que $B = 12$?
   (b) Conditionnellement à $B = 12$, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?
   (c) Dans le cas général, quelle est la probabilité que Aria soit sélectionnée ?
   (d) Quelle est la probabilité que Alice ou Aria soit sélectionnée ?
   (e) Quelle est la probabilité que Béa ou Bénédicte soit sélectionnée ?

On observe 100 notes, $X_1, \ldots, X_{100}$ supposées indépendantes. On note p la proportion de ses variables aléatoires qui sont de même loi que B, les autres étant de même loi que A. On souhaite estimer cette proportion p.

4. (a) On suppose que la première candidate est averse au risque, quelle est alors la loi conditionnelle de sa note X_1 ?
   (b) Même question s'il s'agit d'une candidate non averse au risque.
   (c) En déduire la loi non conditionnelle de X_1.
   (d) Calculer l'espérance de X_1.
   (e) Calculer la variance de X_1.
   (f) On pose $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} (X_i - 10)^2$. Calculer son espérance.
   (g) Proposer un estimateur $\hat{p}$ sans biais de p.
