Bqe ENS Paris-Saclay - ENSAI D2
EcoGestion opt. 1
Session 2020

RAPPORT DU JURY DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Sur les 297 copies corrigées, les notes s'échelonnent de 1 à 20, avec une moyenne de 8,3 et un écart-type de 4,5. Le sujet comportait trois problèmes indépendants, chacun couvrant une partie importante du programme (analyse, algèbre et probabilités/statistiques) et abordant des points que le jury estime essentiels à maîtriser. Ainsi, cette épreuve a permis dans un premier temps de trier celles et ceux connaissant les notions importantes. Dans un second temps, des questions plus difficiles ont fait ressortir les meilleur.e.s candidat.e.s.

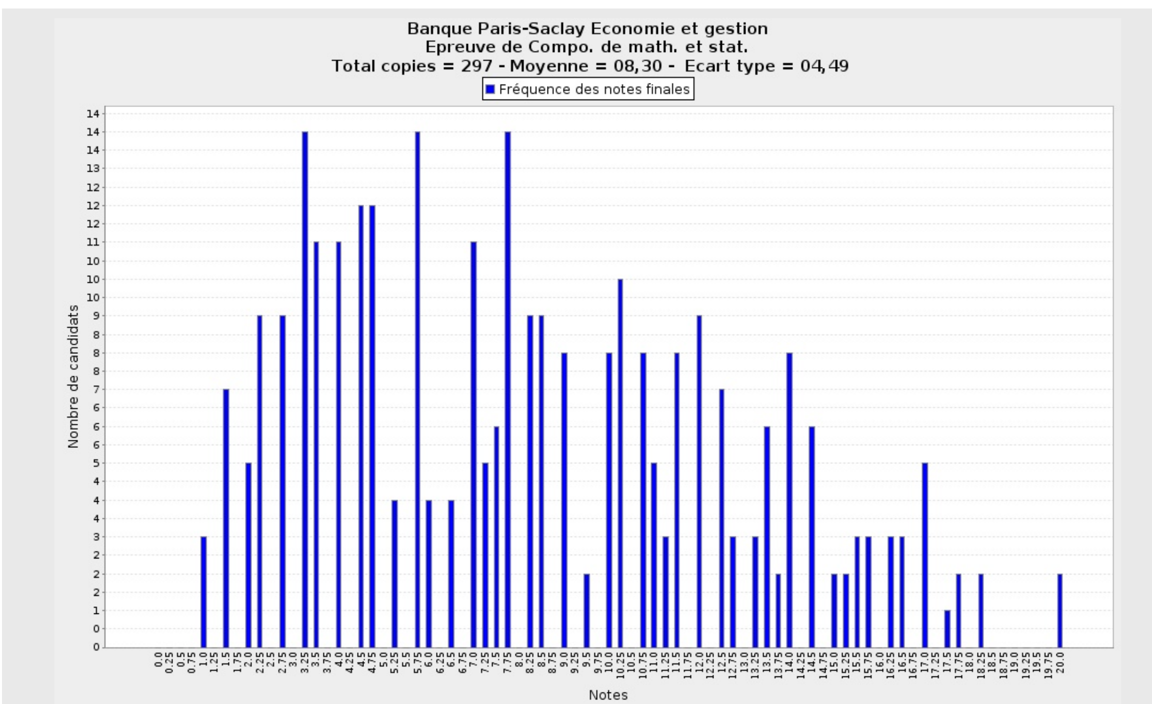

FIGURE 1 – Histogramme des notes

Le jury rappelle aux candidat.e.s que la rédaction est un point clé lors d'une épreuve de mathématiques. Les premières questions de chaque problème, souvent plus simples, sont ainsi l'occasion de montrer aux correcteur.rice.s ses capacités de rédaction propre et rigoureuse. Ainsi, s'il est inutile de réécrire le sujet au début de ses réponses, il est indispensable de justifier et de conclure chacun de ses calculs par une ou plusieurs phrases. Le jury insiste également sur l'importance de la lisibilité de la copie, tant d'un point de vue de l'écriture que de l'orthographe. Même durant l'épreuve de mathématiques et statistiques, il est nécessaire de se relire. Il est déconseillé d'utiliser des notations peu courantes ou dans un contexte incertain. Cette année, par exemple, le symbole d'équivalence a été utilisé de trop nombreuses fois au milieu de phrases rédigées et, qui plus est de manière souvent erronée (la proposition, fausse, suivante a été retrouvée dans plusieurs copies : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) \neq \dim(\mathrm{Ker}(f))$).

Par ailleurs, il est apprécié que les candidat.e.s fassent preuve d'honnêteté dans leur copie, par exemple en s'interrogeant sur la cohérence de leurs résultats. Repérer une incohérence, entre plusieurs de ses résultats ou avec l'énoncé peut permettre à un.e candidat.e de corriger une erreur. Si on ne retrouve pas son erreur, mentionner l'incohérence dans la copie permet de montrer aux correcteur.rice.s sa compréhension du sujet et sera valorisé. Il en est de même pour une justification juste, mais partielle, dont on précise les limites. A l'inverse, des explications malhonnêtes ou floues, afin de dissimuler son erreur ou son ignorance, sont pénalisées et amènent les correcteur.rice.s à être suspicieux vis à vis du reste de la copie.

1 Problème 1

Ce problème en deux parties s'intéressait premièrement à l'étude d'une fonction d'une variable réelle. Il n'y avait pas de difficulté majeure et cette partie a bien été traitée dans son ensemble. Deux erreurs récurrentes ont été cependant retrouvées. Tout d'abord, il fallait prendre garde à bien dessiner le graphe d'une fonction *convexe* à la question 3. Ensuite, la stricte convexité ne garantit pas l'existence d'un minimum global. Par exemple la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ mais n'admet pas de minimum global. L'existence d'un minimum global à la question 4 pouvait être prouvée par le tableau de variation par exemple.

Dans la deuxième partie, l'étude portait sur une fonction de deux variables. L'objectif était d'étudier le comportement du minimum global sans et avec contraintes. La première question de cette partie (convexité de la fonction J) a été très discriminante et a donné lieu à de nombreuses erreurs.

Pour montrer la convexité, on pouvait calculer la hessienne de J : $\nabla^2 J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{x} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{y} \end{pmatrix}$ qui est symétrique définie positive (car diagonale à coefficients positifs) donc J est strictement convexe.

Le minimum est alors caractérisé par $\nabla J(x,y) = 0$, ce qui donne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-a/\varepsilon} \\ e^{-b/\varepsilon} \end{pmatrix}$.

Attention, si la question 1. de la première partie montre que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, elle n'est cependant pas strictement convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$! Ainsi, il était faux de dire que f est strictement convexe comme somme de deux fonctions strictement convexes.

Plus grave, le jury insiste sur un point : pour une fonction deux fois différentiable, la stricte convexité peut être montrée par le fait que la hessienne est définie positive (c'est ce qui était le plus simple à étudier ici). Il est faux de dire “les dérivées partielles secondes sont positives donc la fonction est convexe”. Il faut préciser pourquoi les valeurs propres de la hessienne sont strictement positives. C'était bien sûr évident ici puisqu'elle est déjà diagonale, encore fallait-il le dire.

L'étude du problème sous contrainte ne posait pas de difficultés particulières pour ceux maîtrisant le schéma classique de minimisation sous contrainte avec lagrangien. Le jury s'étonne que beaucoup de candidat.e.s, à la question 2.c., passent de l'égalité $e^{(\lambda-a)/\varepsilon} + e^{(\lambda-b)/\varepsilon} = 1$ à $\frac{\lambda-a}{\varepsilon} + \frac{\lambda-b}{\varepsilon} = 0$. Cela montre une méconnaissance des règles usuelles sur l'exponentielle et le logarithme.

2 Problème 2

Ce problème s'intéressait à la caractérisation des endomorphismes nilpotents en dimension 2 et 3. Bien qu'assez classique dans son enchaînement, il a posé beaucoup de difficultés aux candidat.e.s. peu à l'aise avec l'algèbre linéaire. La notion de famille libre (question 2.b.) n'est que très peu maîtrisée, même au sein des bonnes copies. Beaucoup de candidat.e.s confondent famille libre et vecteurs deux à deux indépendants (quand les définitions données ne sont pas plus farfelues...). Dans cette question, il fallait montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p^*-1}(x_0))$ forme une famille libre en raisonnant par l'absurde.

Remarquons d'abord que si $f^{p^*-1}(x_0) \neq 0$, alors nécessairement, quel que soit $0 \leq k \leq p^* - 1$, $f^k(x_0) \neq 0$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_{p^*-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{p^*-1} f^{p^*-1}(x_0) = 0.$$

Supposons que ces réels ne sont pas tous nuls. On considère k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$. Alors on a

$$a_k f^k(x_0) + a_{k+1} f^{k+1}(x_0) + \cdots + a_{p^*-1} f^{p^*-1}(x_0) = 0.$$

En composant par f^{p^*-1-k}, on obtient

$$a_k f^{p^*-1}(x_0) + a_{k+1} f^{p^*}(x_0) \cdots + a_{p^*-1} f^{2(p^*-1)-k}(x_0) = 0 = a_k f^{p^*-1}(x_0).$$

car pour $k \geq p^*$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Comme $f^{p^*-1}(x_0) \neq 0$, il vient $a_k = 0$. Contradiction. Donc les réels $a_0, a_1, \dots, a_{p^*-1}$ sont tous nuls. La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p^*-1}(x_0))$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Sur une note plus positive, la plupart des candidat.e.s pensent à l'utilisation du théorème du rang (question 3b) lorsque la question est traitée.

3 Problème 3

Il s'agissait ici d'étudier quelques propriétés classiques sur la loi de Poisson, ainsi que de mettre en place des estimateurs pour le paramètre λ. Le jury insiste sur l'importance d'une rédaction consciencieuse, qui a été discriminante lors des premières questions. Voici un exemple avec la question 1 :

On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

$$P(X_1+X_2 = m) = P\left(\bigcup_{k=0}^{m} \left\{X_1 = k\right\} \cap \left\{X_2 = m-k\right\}\right) = \sum_{k=0}^{m} P\left(\left\{X_1 = k\right\} \cap \left\{X_2 = m-k\right\}\right)$$

puisqu'on a une union d'évènements disjoints. De plus, comme X_1 et X_2 sont indépendants,

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = m) &= \sum_{k=0}^{m} P\left(X_1 = k\right) P\left(X_2 = m-k\right) = \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= e^{-2\lambda}\lambda^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!(m-k)!} = e^{-2\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = e^{-2\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}2^m \\ &= e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^m}{m!}. \end{aligned}$$

Donc $X_1 + X_2$ suit bien une loi de Poisson de paramètre 2λ.

Ici, toutes les justifications sont nécessaires et attendues (union d'évènements disjoints et indépendance). Une absence de justification a été pénalisée.

Concernant ces premières questions de probabilités, de trop nombreux.ses candidat.e.s ont fait apparaître dans leur copie des unions ou intersections de probabilités, ce qui n'a évidemment aucun sens. Nous prions les futur.e.s candidat.e.s à faire attention à la rédaction de ces notions classiques.

Pour le reste, la notion d'estimateur est bien acquise et les personnes ayant abordées sérieusement cette partie n'ont buté qu'à partir des questions plus difficiles (2c.d.e.). La question 2.d. a posé des problèmes conceptuels à de nombreux.ses candidat.e.s sur la définition de l'estimateur $\phi(S_n)$. Pour montrer que c'est un estimateur sans biais, il fallait revenir à la définition et calculer son espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\phi(S_n)\right) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \phi(j)\mathbb{P}(S_n = j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^j e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^j}{j!} = e^{-n\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{((n-1)\lambda)^j}{j!} \\ &= e^{-n\lambda}e^{(n-1)\lambda} = e^{-\lambda}. \end{aligned}$$