Bqe ENS Paris Saclay –ENSAI D2
Éco-Gestion Option 1.

- **Concours ENS Paris Saclay - Economie Gestion option I**
- **Concours ENSAI – option économie et gestion**

Session 2020

Composition d'Analyse Economique

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé
L'usage de toute calculatrice est interdit

Le sujet comporte 3 pages, il est constitué de 2 parties.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans sa prison de Caroline du Sud, Bernard Madoff, soucieux de mettre à profit ses 150 ans de prison afin de comprendre les erreurs qu'il a commises durant sa carrière, étudie la théorie économique. Partant du principe qu'une meilleure compréhension des comportements humains lui aurait été salutaire, il cherche désormais à modéliser ces comportements.

1ère partie : théorie du consommateur

Comme c'est souvent le cas en univers carcéral, les cigarettes sont utilisées comme numéraire. Bernard Madoff, que l'on supposera non-fumeur, détient 1000 cigarettes qu'il désire utiliser pour s'acheter du whisky et du caviar, denrées pour lesquelles un marché interne à l'établissement s'est organisé. On note **x** le nombre de bouteilles de whisky et **y** le nombre de boites de caviar. Les bouteilles de whisky (75 cl) s'acquièrent pour 80 cigarettes ($\boldsymbol{p_x} = 80$) tandis que les boites de caviar (50 gr) coûtent 200 cigarettes ($\boldsymbol{p_y} = 200$).

1.1. Afin d'appréhender son choix de consommation, Bernard Madoff s'intéresse, dans un premier temps, aux propriétés de la fonction d'utilité Cobb-Douglas : $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}$ avec $\boldsymbol{\alpha} > 0$ et $\boldsymbol{\beta} > 0$. Pour simplifier son problème, il suppose que les biens sont parfaitement divisibles. Le revenu du consommateur est noté **R** et est égal à : $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{p_x x} + \boldsymbol{p_y y}$, où $\boldsymbol{p_x}$ et $\boldsymbol{p_y}$ représentent respectivement les prix du bien **x** et du bien **y**.

1.1.1. Comment interprétez-vous le fait que $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}$?

1.1.2. Est-il possible que $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \frac{3}{2}$? Pourquoi ?

1.1.3. Les préférences représentées par la fonction d'utilité sont-elles les mêmes qu'en question 1.1.1. lorsque $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{4}$ et $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{3}$? Justifiez.

1.1.4. Dans le cas général ($\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\beta}}$), écrivez le problème de maximisation de l'utilité du consommateur en notant **λ>0** le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire.

1.1.5. Quelle interprétation économique donnez-vous au multiplicateur de Lagrange (**λ**) ?

1.1.6. Calculez les fonctions de demande marshalliennes ($\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p_x}, \boldsymbol{p_y}, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{p_x}, \boldsymbol{p_y}, \boldsymbol{R})$).

1.1.7. Calculez les parts budgétaires affectées à la consommation de chaque bien. Comment évoluent-elles lorsque le revenu **R** augmente ? Qu'en pensez-vous ? Cela vous paraît-il réaliste ?

1.1.8. Quelle est l'expression de la fonction d'utilité indirecte $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p_x}, \boldsymbol{p_y}, \boldsymbol{R})$?

1.1.9. Cette fonction d'utilité indirecte correspond-elle à un concept cardinal ou ordinal ? Justifiez précisément.

1.1.10. En supposant que $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2}$ et $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{3}$, résolvez le problème de consommation initial de Bernard Madoff.

1.1.10.1. Calculez les expressions des fonctions de demande marshalliennes qui en résultent.

1.1.10.2. Comment procédez-vous, sachant que les biens **x** et **y** sont <u>indivisibles</u> ? (Rappel : il s'agit de bouteilles de whisky et de boites de caviar ; **R** = 1000 cigarettes)

1.1.10.3. Quelles sont les consommations optimales de whisky et de caviar ? Madoff a-t-il utilisé la totalité de son budget ?

1.1.10.4. Même question lorsque **R** = 1050.

1.2. Bernard Madoff s'intéresse désormais à la fonction d'utilité CES (Constant Elasticity of Substitution) dont l'expression est la suivante :

$$\boldsymbol{u(x,y) = (x^{\rho} + y^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}}, \text{ avec } \boldsymbol{\rho} \neq 1$$

1.2.1. Comment définissez-vous la notion d'élasticité de substitution entre les deux biens de consommation x et y ?

1.2.2. Ecrire le problème de minimisation du coût du consommateur en prenant soin de noter $\boldsymbol{\bar{u}}$ le niveau d'utilité atteint par le consommateur.

1.2.3. En déduire les fonctions de demande Hicksiennes $\boldsymbol{h_x(p_x, p_y, \bar{u}), h_y(p_x, p_y, \bar{u})}$.

1.2.4. Calculez la fonction de dépense du consommateur : $\boldsymbol{E(p_x, p_y, \bar{u})}$.

1.2.5. En déduire la fonction d'utilité indirecte : $\boldsymbol{V(p_x, p_y, R)}$.

1.2.6. Puis les fonctions de demande marshalliennes : $\boldsymbol{x(p_x, p_y, R), y(p_x, p_y, R)}$.

2ème partie : Choix dans l'incertain :

Encouragé par ces premières expériences d'économiste, Bernard Madoff envisage maintenant de vendre des loteries aux autres détenus. Son calcul tient au fait que les détenus non-fumeurs détiennent généralement 40 cigarettes et ne peuvent s'acheter une bouteille de whisky (coût : 80 cigarettes). Il espère tirer profit de cette situation.

Disposant d'un capital de 60 cigarettes et d'un dé à 6 faces (numérotées de 1 à 6), Bernard Madoff propose de vendre à ses codétenus la loterie suivante :

- Si le lancer de dé débouche sur un « 6 », le gain est de 60 cigarettes pour le détenu lui ayant acheté la loterie ;
- Sinon, le gain de ce dernier est nul.

2.1. Dans un premier temps, Bernard Madoff se concentre sur le critère de l'espérance mathématique.

2.1.1. Calculez l'espérance mathématique de la loterie.

2.1.2. Selon ce critère, à quel prix minimum (noté $\mathbf{p_v}$) doit-il vendre la loterie ?

2.1.3. Ce critère vous paraît-il réaliste ? Pourquoi ?

2.1.4. Quel prix maximum serait prêt à payer un détenu (supposé grand amateur de whisky et rationnel) dont le capital initial est de 40 cigarettes ?

2.2. Se souvenant des leçons du prix Nobel d'économie Harry Markowitz, il se focalise sur le critère espérance-variance. Bernard Madoff suppose alors que le bon critère d'évaluation d'une loterie serait donné par la fonction d'utilité suivante : $\boldsymbol{U(\widetilde{w}) = E(\widetilde{w}) + \mathbf{k}\, \sigma^2(\widetilde{w})}$, où $\boldsymbol{\widetilde{w}}$ représente la richesse finale aléatoire, $\boldsymbol{E(\widetilde{w})}$ l'espérance mathématique, $\boldsymbol{\sigma^2(\widetilde{w})}$ la variance de la richesse finale, et **k** un paramètre de préférence de l'individu.

2.2.1. Calculez son espérance mathématique de richesse finale lorsqu'il vend cette loterie au prix $\mathbf{p_v}$.

2.2.2. Calculez la variance de sa richesse finale lorsqu'il vend la loterie au prix $\mathbf{p_v}$.

2.2.3. Que signifie au plan économique, selon vous, le fait que le paramètre **k** soit positif ou négatif ?

2.2.4. En supposant que **k=-0,05**, quel serait le prix minimum $\boldsymbol{p_v^{min}}$ exigé par Bernard Madoff ? (*aide : il convient de comparer l'utilité de la situation initiale avec celle résultant du fait* *d'avoir vendu la loterie*). Cela est-il réaliste lorsque le client potentiel (dont l'objectif supposé est d'acheter une bouteille de whisky) dispose d'un capital de 40 cigarettes ?

2.2.5. Même question si **k=-0,01**.

2.2.6. Que se passe-t-il si **k=0,01** ?

2.2.7. Notre célèbre détenu, pour établir son tarif, s'intéresse maintenant au comportement de ses clients potentiels. Pour cela, il suppose que l'approche espérance-variance est universelle et que le paramètre de préférence **k** s'établit au même niveau pour tous (**k=-0,01**). Par conséquent, $\boldsymbol{U(\tilde{w}) = E(\tilde{w}) - 0{,}01\,\sigma^2(\tilde{w})}$.

2.2.7.1. Considérant le cas d'un détenu dont le capital est de 40 cigarettes, quel est le prix d'achat maximum (noté $\boldsymbol{p_a^{max}}$) que ce dernier serait prêt à payer pour acquérir la loterie ?

2.2.7.2. L'échange peut-il avoir lieu dans ce contexte ? Pourquoi ?

2.2.7.3. Si l'échange ne peut avoir lieu, et en supposant que le naturel revienne au galop, dans quelle mesure Bernard Madoff devrait piper le dé (en truquant le dé afin de réduire la probabilité que le « 6 » ne sorte) afin que l'échange soit envisageable pour lui ?

2.3. Après un peu de lecture supplémentaire de la littérature économique, Bernard Madoff juge plus pertinent de s'appuyer sur le critère plus général de l'espérance d'utilité de von Neumann et Morgenstern (1944). Selon ce critère, l'individu calcule l'utilité de la richesse finale de chaque état potentiel, puis évalue la situation de risque, qui se présente à lui, en calculant l'espérance mathématique d'utilité. Dans le cas où deux états de la nature se présentent, de richesse respectives $\mathbf{w_1}$ et $\mathbf{w_2}$, et de probabilités respectives **(1-q)** et **q**, l'espérance d'utilité s'écrit : $\boldsymbol{EU = (1-q)u(w_1) + qu(w_2)}$, où $\boldsymbol{u(w_i)}$ représente la fonction d'utilité de la richesse finale en l'état i. Par la suite, nous supposerons que cette fonction d'utilité est une exponentielle négative, identique pour tous (Bernard Madoff et codétenus) : $\boldsymbol{u(w) = -e^{-\delta w}}$, où $\boldsymbol{\delta} > 0$ correspond au coefficient d'aversion au risque. On supposera également, dans cette sous-partie, que la richesse initiale est la même pour tous et qu'elle s'établit à **60 cigarettes**.

2.3.1. Exprimer le prix de vente minimum $\boldsymbol{p_v^{min}}$ exigé par Bernard Madoff pour vendre sa loterie.

2.3.2. Exprimer le prix d'achat maximum $\boldsymbol{p_a^{max}}$ envisageable pour un détenu.