Bqe ENS Paris-Saclay - ENSAI D2
EcoGestion opt. 1
Session 2020

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Problème 1. *Ce problème comporte deux parties, indépendantes entre elles.*

Soit a, b, ε trois réels strictement positifs. On définit la fonction $J : \Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$:

$$J(x, y) = ax + by + \varepsilon h(x) + \varepsilon h(y)$$

avec h définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x \ln x - x \end{array}$$

Partie I

1. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto ax + \varepsilon h(x)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Faire un tableau de variations de la fonction f. Préciser les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer son minimum global en justifiant son existence et son unicité.

Partie II

1. Montrer que J est strictement convexe sur Ω. Calculer le minimum de J sur Ω.
2. On cherche maintenant à résoudre le problème sous contraintes :

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y)\in\Omega} J(x, y) \\ x + y = 1 \end{cases} \tag{1}$$

On définit le lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ du problème (1), où λ est le multiplicateur de Lagrange :

$$\mathcal{L} : (x, y, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto J(x, y) - \lambda(x + y - 1)$$

a. Écrire les équations du premier ordre associées au lagrangien.
b. On note $(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ l'éventuelle solution du problème (1). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_\varepsilon^* = e^{(\lambda - a)/\varepsilon} \\ y_\varepsilon^* = e^{(\lambda - b)/\varepsilon} \end{cases}$$

c. Expliciter λ. En déduire $(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ en fonction de a, b, ε.
d. Montrer que $(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ est bien solution du problème (1).
e. Bonus. Calculer $\lim_{\varepsilon \to 0}(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$. On pourra distinguer les cas $a \geq b$ ou $b \geq a$.

Problème 2.

Cet exercice s'intéresse à l'étude d'endomorphismes spécifiques de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, et si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que la puissance n-ième, $n \in \mathbb{N}$, d'un endomorphisme est définie de la façon suivante :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Un endomorphisme est *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. On définit alors *l'indice de nilpotence* p^* de f : $p^* = \min\{p \in \mathbb{N}^* | f^p = 0\}$. C'est le plus petit entier positif p tel que f^p est nul.

De même, une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et on définit de manière similaire l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

Soit les matrices N_1 et N_2 suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont nilpotentes, et préciser leur indice de nilpotence.

Dans toute la suite du problème, on considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ nilpotent non nul et on note p^* son indice de nilpotence.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{p^*-1}(x_0) \neq 0$.

- **a.** Pourquoi un tel x_0 existe-t-il ?
- **b.** Montrer que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p^*-1}(x_0))$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
- **c.** En déduire que $p^* \leq 3$.

Dorénavant, et jusqu'à la question 6, on suppose en plus que $\dim \mathrm{Ker} f = 1$.

3. On veut montrer qu'alors $p^* = 3$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $p^* = 2$.

- **a.** Montrer que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.
- **b.** En déduire une absurdité et conclure.

4. Exprimer f sous forme matricielle dans la base $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right)$.

5. En déduire que f s'exprime dans une base bien choisie comme N_2.

6. Bonus. Montrer que lorsque $\dim \mathrm{Ker} f = 2$, f s'exprime dans une base bien choisie comme N_1.

Problème 3.

On rappelle l'expression suivante de l'exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi de Poisson de paramètre λ. On nomme $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. **a.** Soit $m \in \mathbb{N}$. En utilisant l'égalité d'ensembles

$$\Big\{X_1 + X_2 = m\Big\} = \bigcup_{k=0}^{m} \Big\{X_1 = k\Big\} \cap \Big\{X_2 = m-k\Big\},$$

calculer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = m)$.

b. En déduire la loi de la variable aléatoire $X_1 + X_2$.

c. Montrer alors que S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

2. Soit $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur non biaisé de λ.

3. Dans cette partie, on cherche à estimer de la meilleure façon possible $e^{-\lambda}$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on pose $Y_i = 1$ si $X_i = 0$ et $Y_i = 0$ sinon. On considère $N = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

a. Déterminer la loi de Y_i, pour $i = 1, \dots, n$. En déduire la loi de N.

b. Montrer que $\dfrac{N}{n}$ est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

On définit, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\phi(j) = \mathbb{P}(X_1 = 0 | S_n = j)$.

c. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\phi(j) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^j$.

d. Montrer que $\phi(S_n)$ est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

e. Bonus. On rappelle que lorsque l'on a deux estimateurs sans biais, on préfère celui dont la variance est la plus faible. Démontrer que, quelle que soit la valeur de λ, $\phi(S_n)$ est un meilleur estimateur que $\frac{N}{n}$.