

**Bqe ENS Paris Saclay –ENSAI D2  
Éco-Gestion Option 1.**

---

- **Concours ENS Paris Saclay - Economie Gestion option I**
  - **Concours ENSAI – option économie et gestion**
- 

**Session 2021**

---

**Composition d'Analyse Economique**

---

Durée : **4 heures**

---

*Aucun document n'est autorisé  
L'usage de toute calculatrice est interdit*

Le sujet comporte 3 pages, il est constitué de 2 parties.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## Première Partie

On s'intéresse aux préférences de deux consommateurs, 1 et 2, respectivement caractérisées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$u_1(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \text{ et } u_2(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$$

où  $x_1$  et  $x_2$  représentent les consommations en biens 1 et 2. On note  $p_1$  et  $p_2$ , les prix respectifs des biens 1 et 2 et  $y$  le revenu supposé identique pour les deux consommateurs ( $y > 0$ ).

- 1.1. Dans le cas du consommateur 1, écrivez le programme de maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire.
  - 1.1.1. Est-il possible que  $x_1^* = 0$  ou  $x_2^* = 0$  ? Justifiez précisément.
  - 1.1.2. Calculez les fonctions de demande Marshalliennes ( $x_1(p_1, p_2, y)$  et  $x_2(p_1, p_2, y)$ ).
  - 1.1.3. En déduire l'expression de la fonction d'utilité indirecte  $V_1(p_1, p_2, y)$ .
- 1.2. Ecrivez le programme de maximisation de l'utilité du consommateur 2 sous contrainte budgétaire.
  - 1.2.1. Est-il possible que  $x_1^* = 0$  ? Même question pour  $x_2^* = 0$ . Justifiez vos réponses.
  - 1.2.2. Calculez les fonctions de demande Marshalliennes ( $x_1(p_1, p_2, y)$  et  $x_2(p_1, p_2, y)$ ). Il conviendra, cependant, de bien différencier la réponse obtenue en fonction d'un seuil de revenu  $y$ , que vous identifierez.
  - 1.2.3. Quelle est l'expression de la fonction d'utilité indirecte  $V_2(p_1, p_2, y)$  ?
- 1.3. Comment évolue, toutes choses égales par ailleurs, l'utilité de ces consommateurs, lorsque le revenu  $y$  augmente ? Représentez graphiquement le comportement de l'utilité en fonction de  $y$ , pour chacun de ces consommateurs. Interprétez.
- 1.4. La fonction d'utilité  $T(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}$  représente-t-elle les mêmes préférences que la fonction d'utilité  $u_1(x_1, x_2)$  ? Justifiez votre réponse.
- 1.5. La fonction d'utilité  $Z(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2x_1 + x_2^2$  représente-t-elle le même ordre de préférence que la fonction d'utilité  $u_1(x_1, x_2)$  ? Justifiez.
- 1.6. La fonction d'utilité  $H(x_1, x_2) = \sqrt{\ln x_1} + \sqrt{x_2}$  représente-t-elle le même ordre de préférence que la fonction d'utilité  $u_2(x_1, x_2)$  ? Justifiez votre réponse.
- 1.7. On suppose maintenant que le prix du bien 2,  $p_2$ , est divisé par deux au-delà d'un certain seuil de consommation  $S > 0$ . Il est également supposé que le revenu permette d'atteindre et de dépasser ce seuil de consommation ( $y > p_2 S$ ).
  - 1.7.1. Caractériser la contrainte budgétaire du consommateur 1 en raisonnant selon que  $x_2$  est supérieur ou inférieur à  $S$ .

- 1.7.2. Représentez, dans le plan  $(x_1, x_2)$ , les possibilités de consommation de ce même consommateur 1.
- 1.7.3. Représentez graphiquement les différentes possibilités d'équilibre du consommateur 1.
- 1.7.4. Caractérissez analytiquement les différentes solutions obtenues et identifiez en quelles circonstances elles surviennent.
- 1.7.5. Qu'en est-il du consommateur 2 ? Caractérissez également les différentes solutions possibles pour ce consommateur en fonction des paramètres de son problème.

## Deuxième Partie

On étudie une économie dans laquelle coexistent deux types de consommateurs, 1 et 2, d'effectifs respectifs  $N_1$  et  $N_2$ . Chaque consommateur de type  $i$  ( $=1,2$ ), dispose d'une dotation en bien 1, notée  $\omega_1^i$ , qu'il partage entre consommation  $x_1^i$  et participation au financement du bien collectif  $z_1^i$ . La quantité totale de bien 1 disponible dans l'économie est donc égale à :  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = N_1\omega_1^1 + N_2\omega_1^2$

On note  $X_2$  la quantité de bien collectif produite dans l'économie ; de même,  $X_1$  représente la quantité de bien 1 consacrée à la production du bien collectif  $X_2$ . La fonction de production de bien collectif s'écrit :  $X_2 = 2\sqrt{X_1}$ .

Les préférences respectives des deux types de consommateurs sont données par les fonctions d'utilité suivantes :

$$u_1(x_1^1, X_2) = x_1^1 + \ln X_2 \text{ et } u_2(x_1^2, X_2) = x_1^2 + 2 \ln X_2,$$

où  $x_1^1$  et  $x_1^2$  représentent les quantités de bien 1 consommées par les consommateurs 1 et 2.

*Durant toute cette partie, on fera abstraction des situations dans lesquelles  $x_1^1 = 0$  ou  $x_1^2 = 0$ . Il importe de bien comprendre que les consommateurs d'un même type  $i$  ( $=1,2$ ), sont absolument identiques en tous points, et que l'on s'attend à ce que leurs comportements soient identiques. Evidemment, les comportements de consommateurs de types différents pourront différer.*

- 2.1. L'Etat, dans le but d'orienter sa politique économique, maximise la somme des utilités de ses citoyens, afin de déterminer les niveaux optimaux de consommation et de bien collectif.
  - 2.1.1. Ecrivez précisément le problème d'optimisation qu'il doit résoudre, en ayant soin de bien tenir compte des contraintes de ressource en bien 1 et de production du bien public.
  - 2.1.2. Quelles sont les propriétés économiques de la solution de ce problème ?
  - 2.1.3. Résolvez ce problème et caractérissez la solution obtenue.
    - 2.1.3.1. Quelle est la quantité de bien collectif offerte ?
    - 2.1.3.2. La solution obtenue est-elle unique ? Interprétez les résultats obtenus.
    - 2.1.3.3. Comment évolue l'offre de bien collectif lorsque le nombre de citoyens augmente ?
    - 2.1.3.4. La charge moyenne, par individu, dans le financement du bien collectif décroît-elle lorsque le nombre de citoyens augmente ? Répondez précisément.

2.2. L'Etat se focalise maintenant sur la mise en œuvre opérationnelle de sa politique. Ainsi, il s'interroge sur la nature de la solution qu'il obtiendrait en laissant à ses citoyens l'entière liberté de fixer leurs contributions  $z_1^i$  à la production du bien collectif.

2.2.1. Dans un premier temps, il considère chaque groupe de consommateurs, 1 et 2, séparément. On suppose que chaque groupe n'a accès qu'à l'offre de bien collectif qu'il décide et élabore donc sa propre offre de bien collectif indépendamment de l'autre groupe. Dans chaque groupe, 1 ou 2, chaque consommateur choisit sa participation  $z_1^i$  au financement du bien collectif  $X_2^i$  (en considérant les participations des autres comme données). La quantité de bien collectif disponible dans chaque groupe s'écrit :  $X_2^i = 2\sqrt{X_1^i} = 2\sqrt{N_i z_1^i}$ .

2.2.1.1. Dans le cas du groupe des consommateurs de type 1, à quels résultats aboutiraient cette procédure ? Déterminez  $z_1^1$ ,  $X_1^1$  et  $X_2^1$ .

2.2.1.2. Même questions dans le cas du groupe des consommateurs de type 2.

2.2.1.3. Ces allocations de ressource sont-elles optimales ? Justifiez votre réponse.

2.2.1.4. Comment évoluent-elles lorsque le nombre de citoyens augmente ?

2.2.2. Dans un second temps, l'Etat décide de regrouper tous les citoyens et de ne recourir qu'à une seule source de bien collectif. Par conséquent, l'offre de bien collectif est donnée par :  $X_2 = 2\sqrt{X_1^1 + X_1^2} = 2\sqrt{N_1 z_1^1 + N_2 z_1^2}$ .

2.2.2.1. Pour résoudre ce cas de figure, dans un premier temps, il conviendra de supposer que chaque citoyen considère que tous les autres citoyens sont identiques en tous points. Ainsi, les citoyens de type 1 pensent que tous les autres citoyens sont semblables à eux. Il en va de même pour les citoyens de type 2. Caractériser la solution obtenue.

2.2.2.2. Observe-t-on une amélioration de l'offre de bien collectif par rapport à la situation où chaque groupe décide de son propre niveau de bien collectif indépendamment de l'autre ?

2.2.2.3. Que se passe-t-il si les citoyens des deux groupes prennent conscience de leurs différences ? Est-il possible que les citoyens de l'un des groupes décident de ne pas contribuer au financement du bien collectif ?