Bqe ENS Paris-Saclay - ENSAI D2
EcoGestion opt. 1
Session 2021

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Problème 1. Algèbre

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y + z, 2z)$, et $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application identité.

1. **a.** Montrer que f est une application linéaire.

b. Donner la matrice M associée à f dans (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et donner en une base. On notera u_1 un vecteur de cette base. L'application f est-elle injective ?

2. **a.** Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

b. Montrer que les vecteurs $u_2 = f(e_2) = (-1, 1, 0)$ et $u_3 = f(e_3) = (1, 1, 2)$ forment une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c. L'application f est-elle surjective ?

3. **a.** Montrer que (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Donner la matrice D de f dans cette base.

c. Donner une matrice P telle que $D = P^{-1}MP$.

4. **a.** Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, expliciter la matrice associée à l'application f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Problème 2. Probabilités et statistiques

Partie 0 : identités binomiales

Les résultats de cette partie peuvent être admis si besoin pour la partie II.

1.

a. Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$. Montrer que $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.

b. Montrer que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $N \in \mathbb{N}^*, N \geq k$. Montrer que :

$$\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}.$$

Indication : On pourra utiliser une récurrence sur N.

Partie I : Urnes et probabilités

Une urne contient $N \in \mathbb{N}^*$ boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N.

2. Dans une première expérience, on tire successivement **avec remise** les boules une par une, jusqu'à tirer la boule marquée du chiffre 1. On note alors X le nombre de tirages effectués. Quelle est la loi de X ? En préciser les paramètres.

3. Dans une seconde expérience, on tire successivement **sans remise** les boules une par une, jusqu'à tirer la boule marquée du chiffre 1. On note alors Y le nombre de tirages effectués. Montrer que Y suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$.

4. Dans une troisième expérience, on effectue un tirage de $r \in \{1, \dots N\}$ boules **sans remise**, et l'on note Z le nombre de boules tirées et marquées d'un chiffre inférieur ou égal à $m \in \{1, \dots, N\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, $n \leq r$. Montrer que $P(Z = n) = \frac{\binom{m}{n}\binom{N-m}{r-n}}{\binom{N}{r}}$.

Partie II : Construction d'un estimateur

L'objectif de cette partie est de construire un estimateur du nombre N de boules dans l'urne. On suppose que l'on a tiré **successivement et sans remise** k boules dans l'urne, k fixé. On note $X_1, \dots, X_k$ les numéros du tirage, et on définit $X_{(k)} = \max(X_1, \dots, X_k)$.

5. Montrer que

$$P(X_{(k)} = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n < k, \\ \\ \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} & \text{si } k \leq n \leq N \end{cases}$$

6. Montrer que $E[X_{(k)}] = \frac{k}{k+1}(N+1)$.

7. En déduire un estimateur sans biais de N.

Problème 3. Analyse

Dans cet exercice, on considère l'espace E des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables et de dérivée continue, telles que $f(0) = f(1) = 0$. Nous rappelons que la fonction cotangente est définie, lorsque cela est possible, par $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. **Dans l'intégralité de l'exercice, f est un élément de E.**

Partie I : Limites et équivalents

1. a. Donner le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \operatorname{cotan}(\pi x)$ et déterminer un équivalent de $\operatorname{cotan}(\pi x)$ lorsque x est au voisinage de 0, $x > 0$.

b. De même, montrer que $\operatorname{cotan}(\pi x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x<1}}{\sim} \dfrac{1}{\pi(x-1)}$.

c. Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{cotan}(\pi x)$ sur $]0,1[$ est égale à $x \mapsto -\pi(1 + \operatorname{cotan}(\pi x)^2)$. Tracer la courbe représentative de $x \mapsto \operatorname{cotan}(\pi x)$ sur $]0,1[$.

2. Soit $f \in E$.

a. On définit la fonction g sur $]0,1]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que g tend vers $f'(0)$ lorsque x tend vers 0, $x > 0$.

b. De même, calculer la limite de la fonction h, définie sur $[0,1[$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{x-1}$, lorsque x tend vers 1, $x < 1$.

Partie II : Inégalité de Poincaré

3. Considérons l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{cotan}(\pi x)dx.$$

a. En utilisant les questions précédentes, montrer que la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0 et en 1. En déduire que l'intégrale I est bien définie.

b. Soit $0 < a < b < 1$. Appliquer une intégration par parties à l'intégrale

$$\int_a^b f(x)f'(x)\mathrm{cotan}(\pi x)dx. \tag{1}$$

c. En considérant les limites $a \to 0, b \to 1$, en déduire que l'on a

$$2\pi I = \pi^2 \int_0^1 f(x)^2(1 + \mathrm{cotan}(\pi x)^2)dx.$$

4. On considère l'intégrale J définie par

$$J = \int_0^1 \left(f'(x) - \pi f(x)\mathrm{cotan}(\pi x)\right)^2 dx.$$

a. Montrer que la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0 et en 1. En déduire que J est bien définie.

b. En développant J, montrer que pour toute fonction f de E, on a la relation

$$\int_0^1 f(x)^2dx \leq \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'(x)^2dx.$$