

## **RAPPORT DU JURY DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES**

Sur les 357 copies corrigées, les notes s'échelonnent de 1 à 19,6, avec une moyenne de 5,5 et un écart-type de 4,8. Le sujet était constitué de trois problèmes indépendants abordant les grands thèmes du programme : l'algèbre linéaire, les probabilités, les statistiques et l'analyse. Le premier problème et le début du deuxième comportaient des questions classiques, qui permettaient à tout.e candidat.e de montrer sa connaissance des définitions importantes et ses capacités de rédaction. La suite de l'épreuve, constituée de questions parfois plus délicates, a permis de différencier les candidat.e.s selon leur maîtrise du programme. Les bonnes copies ont abordé tous les problèmes et toutes les questions ont reçu des réponses.

Le jury regrette néanmoins que dans certaines copies les notions essentielles (noyau, image, coefficients binomiaux) ne semblent absolument pas comprises. Le jury a noté une amélioration de la rédaction dans la plupart des copies par rapport à l'année précédente et rappelle une fois de plus qu'une rédaction claire et rigoureuse est primordiale lors d'une épreuve de mathématiques. Il est indispensable de justifier un résultat et de conclure chacun de ses calculs par une ou plusieurs phrases. En particulier, lorsque l'on demande la matrice associée à une application linéaire (Problème 1, question 1.b) ou la loi d'une variable aléatoire (Problème 2, question I.2), il est nécessaire d'expliquer par une phrase (ou un calcul rapide) comment on a obtenu ce résultat. Le jury insiste aussi sur l'importance de la lisibilité de l'écriture et du respect de l'orthographe et encourage les candidat.e.s à se relire.

### **1 Problème 1**

Ce premier problème était très classique et reprenait l'étude d'une application linéaire et de sa matrice associée. Il n'y avait pas de difficulté majeure dans cet exercice. La plupart des copies ont tenté d'y répondre et en général, les copies qui peinaient lors de ce problème ont très peu répondu aux problèmes suivants.

Comme mentionné précédemment, dans beaucoup de copies les notions de base ne sont pas comprises : les définitions de l'image et du noyau d'une application linéaire ne sont pas maîtrisées. Plus encore, de manière récurrente, des copies ont confondu ensemble et matrice, en affirmant par exemple que l'image de  $f$  est égale à la matrice  $M$  ou encore que son noyau

est égal à un vecteur. Une autre erreur récurrente retrouvée dans ce problème était d'écrire qu'une famille de 3 éléments dans un ensemble de dimension 3 est génératrice. Évidemment, une famille libre de 3 éléments dans un ensemble de dimension 3 est une base, donc c'est aussi une famille génératrice. En revanche, 3 éléments de  $\mathbb{R}^3$  ne suffisent pas nécessairement pour engendrer  $\mathbb{R}^3$ .

Le théorème du rang est lui connu par la plupart des candidat.e.s et utilisé le plus souvent à bon escient.

Très peu de copies ont été capables de répondre aux questions d'injectivité/surjectivité de  $f$ , ce qui était pourtant immédiat si l'on avait déterminé son noyau ou son image. Encore une fois, il est important, y compris quand la question paraît simple, de ne pas uniquement donner la réponse à la question sans justification ou définition qui confirment la bonne compréhension du raisonnement, aussi rapide soit-il.

Lorsque le sujet était compris, le jury a apprécié la variété et la créativité des réponses aux deux dernières questions.

## 2 Problème 2

Le deuxième problème était constitué de trois parties, auxquelles on pouvait répondre de manière indépendante. Il s'articulait autour d'une urne contenant un nombre inconnu de boules numérotées. La partie 0 avait pour but de retrouver des formules classiques impliquant les coefficients binomiaux, qui seraient utiles pour la suite du problème. Le raisonnement par récurrence dans la question 1.c était source de difficultés puisque la récurrence portait sur  $N$  et non sur  $k$  et puisqu'elle commençait à  $N = k$ . Malgré l'indication dans l'énoncé, de nombreuses copies ont tenté d'effectuer une récurrence sur l'entier  $k$ .

La partie I regroupait des questions de dénombrement, où il était demandé de retrouver les lois et leurs paramètres de plusieurs variables aléatoires. Pour ces questions, à de nombreuses reprises, les réponses étaient données sans aucune justification. Que la réponse soit juste ou fausse, rien ne permet alors de savoir si elle est due au hasard ou à une compréhension satisfaisante/imparfaite/erronée de l'expérience. Ainsi, à la question 2., la réponse attendue devait justifier en quoi l'expérience décrite ressemblait à une loi géométrique, soit en donnant la définition d'une loi géométrique, soit en calculant les probabilités  $X = k$ . Par ailleurs, il est indispensable de donner le support d'une variable aléatoire, ou l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre, lorsque l'on détermine sa loi. Pour les questions 3. et 4., on pouvait calculer les probabilités de chaque évènement pour retrouver les lois données. En particulier, il était important de correctement justifier l'intervention des coefficients binomiaux dans la question 4. Pour ces questions, le jury a apprécié la qualité de la rédaction de certaines copies et salue les efforts de ces candidat.e.s ayant fourni des réponses rigoureuses et argumentées.

Le but de la partie II était de construire un estimateur du nombre de boules dans l'urne à partir de la loi du plus grand numéro tiré parmi les boules tirées  $X_{(k)}$ . Pour obtenir la loi de  $X_{(k)}$  il fallait observer que l'évènement  $\{X_{(k)} = n\}$  est équivalent à l'évènement  $\{k - 1 \text{ boules tirées ont leur numéro strictement inférieur à } n \text{ et la boule numérotée } n \text{ est tirée}\}$ . Il était ensuite attendu de justifier toutes les étapes du calcul (indépendance des évènements, différenciation

des cas selon la valeur de  $n$ ).

La question suivante nécessitait principalement de réutiliser les résultats de la partie 0 et de connaître la définition de l'espérance. Le jury rappelle qu'il ne peut y avoir la variable que l'on veut estimer dans la définition de l'estimateur, mais dans l'ensemble, lorsqu'elle était abordée, la dernière question a bien été traitée.

### 3 Problème 3

Dans ce dernier problème, l'objectif était de redémontrer l'inégalité de Poincaré. Il était divisé en deux parties. Certains points de la partie II (questions 3.a. et 4.a.) nécessitaient la réponse à la question 1.a., relativement simple à obtenir. Les autres résultats nécessaires de la partie I étaient donnés.

La première partie se concentrait sur l'étude de la fonction cotangente. Les étudiant.e.s semblent avoir rencontré plus de difficultés qu'attendu pour répondre à ces questions. Le jury a été surpris par la grande proportion de candidat.e.s qui n'a pas su déterminer les valeurs pour lesquelles la fonction sinus s'annule. Par ailleurs, très peu de candidat.e.s sont parvenu.e.s à donner un équivalent de cotangente autour de 1. Certes, la notion d'équivalent est une notion parfois subtile d'analyse, mais il n'est pas normal de trouver autant de candidat.e.s justifiant l'équivalence par le fait que les fonctions ont la même limite. Pour montrer l'équivalence en 1, on pouvait utiliser le fait que  $\sin(u) = \sin(\pi - u)$  et que  $\sin(-u) = -\sin(u)$  pour montrer que

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi(1 - x)) = -\sin(\pi(x - 1)).$$

De nombreuses copies ont correctement utilisé le taux d'accroissement pour répondre aux questions 2.a. et 2.b. Plusieurs copies ont tenté d'utiliser le théorème de l'hôpital, mais en donnant systématiquement des hypothèses erronées.

La seconde partie demandait d'étudier l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)f'(x)\cotan(\pi x)dx.$$

Le jury note une amélioration lors des calculs avec intégrales, par rapport à l'année précédente, peut-être due au fait que cette partie est la dernière de l'épreuve et que seuls les candidats plus à l'aise avec ce thème ont traité ces questions.