Concours $\mathbf{1^{ère}}$ **année**
Economie et Gestion
Session 2022

---

Mathématiques et Statistiques
**Rapport du Jury**

Sur 373 candidat·es présent·es, 353 ont composé. Les notes s'échelonnent de 0 à 17,7. La moyenne générale est de 4,6 et l'écart type de 4,3. L'épreuve était constituée de trois problèmes de difficulté comparable, abordant l'analyse, les probabilités et statistiques et l'algèbre linéaire. Les bonnes copies ont largement abordé tous les problèmes. Inversement, beaucoup de candidat·es ont rapidement été bloqué·es dans chaque problème. Le problème 1 semble être l'exercice qui a posé le plus de difficulté aux étudiant·es. Rappelons que les étudiants peuvent répondre aux exercices dans l'ordre de leur choix.

## Problème 1

Il s'agit d'un problème d'analyse qui commence par l'étude de la fonction

$$t : x \mapsto t(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

plutôt bien traitée. La deuxième question vise à établir que la fonction $t$ vérifie l'équation

$$t(x+y) = \frac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}.$$

La deuxième partie vise à chercher l'ensemble des fonctions vérifiant cette relation. La majorité des copies ne savent pas comment faire face à des questions portant sur une fonction générique $f$ vérifiant la relation. Elles choisissent alors de supposer que $f = t$, ou tournent en rond en supposant par exemple que $f(0) = 0$ pour le démontrer... Pour la question 3, il suffisait de prendre $x = 0$ et la relation vérifiée par $f$ assure que pour tout $y$

$$f(0+y) = \frac{f(0)+f(y)}{1+f(0)f(y)} \Leftrightarrow f(0)(1-f(y)^2) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

La question 6 se résout de façon similaire, en choisissant $y = -x$. Pour la dérivabilité ou la continuité (questions 4 et 5) les copies qui partent de la définition de ces concepts parviennent en général à conclure. Pour la question 7, on peut conclure à la monotonie de $f$ en montrant que $f(x) - f(y)$ est de signe constant pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, tels que $x \geq y$. Pour cela, peut observer que $f(x) - f(y)$ est de même signe que $f(x-y)$ et conclure. La question 8 se résout rapidement en montrant que $g(x+a) = g(x)g(a)$. Quelques excellentes copies sont parvenues à répondre à la question 9, où il faut montrer que $g$ vérifie l'équation différentielle qui caractérise la fonction exponentielle et qu'ainsi

$$g(x) = e^{kx}.$$

## Problème 2

Le problème 2 porte sur la modélisation de la relecture de texte pour en corriger les erreurs. Beaucoup de candidat·es identifient une loi de Bernoulli (question 1) pour une situation binaire puis une loi géométrique (question 4), et traitent plutôt bien les questions 2 et 3. Le calcul de la fonction de répartition de la loi géométrique perd quelques candidat·es, qui cherchent à utiliser une intégrale pour une loi discrète. Les bonnes copies ont compris que pour repérer toutes les erreurs au moins une fois, il faut utiliser le max des $Y_j$, chaque $Y_j$ donnant le nombre de relecteurs nécessaires pour identifier l'erreur $j$. Le max permet d'obtenir simplement la fonction de répartition (question 6), il faut ensuite (question 7) prendre la différence pour obtenir la probabilité élémentaire :

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(1 - (1-p)^k\right)^n - \left(1 - (1-p)^{k-1}\right)^n$$

Les questions 8 et 9 sont des applications de la formule obtenue dans des cas simples.
Pour un grand nombre de copies, les réponses aux questions de ce problème ont été rédigées trop rapidement, en oubliant les arguments et justifications nécessaires, comme l'indépendance des variables aléatoires, où se succèdent les calculs sans réellement chercher à comprendre le problème, ce qui entraine par exemple des erreurs d'indices pour les sommes ou les produits.

## Problème 3

Ce problème étudie l'ensemble $C(A)$ des matrices qui commutent avec une matrice donnée $A$ carrée d'ordre 3. Les premières questions demandent uniquement d'appliquer le cours ou des calculs matriciels rapides. Elles ont néanmoins mis en difficulté un certain nombre de candidat·es qui ont mélangé matrices et ensembles, ce qui a pu donner lieux à des calculs qui n'avaient aucun sens.
La question 2 vise à définir le commutant d'une matrice diagonale en fonction de ses coefficients. Pour déterminer la matrice $M$, il faut résoudre un système assez classique et obtenir des solutions qui dépendent les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Pourtant seules les bonnes copies sont parvenues à le résoudre de manière rigoureuse et obtenir l'ensemble des résultats. Pour la question 2.c., on obtient lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_3$,

$$C(D) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1, x_2, y_1, y_2, z_3 \in \mathbb{R}\},$$

espace vectoriel de dimension 5 et dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, $C(D) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
La diagonalisation de la matrice $A$ a généralement été bien traitée et mène à définir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour répondre rigoureusement à la question 3.c., un argument de bijection d'espace vectoriel était nécessaire mais puisque cette démonstration était exigeante, les membres du jury ont accepté les réponses moins précises.

Les copies qui sont parvenues à la dernière question ont, en général, réussi à y répondre de manière satisfaisante. Néanmoins, dans cette dernière partie du problème, certaines copies ont oublié une partie des arguments pour justifier que l'on a une base de $C(D)$ ou pour justifier sa dimension. Par exemple, certains candidat·es ont affirmé qu'une famille d'éléments non nuls est libre ou encore que n'importe quelle famille de 3 éléments dans un ensemble de dimension 3 est génératrice.