ECOLE NORMALE SUPERIEURE PARIS SACLAY
ENSAI CIVIL
INSEE ATTACHE STATISTICIEN

CONCOURS D'ADMISSION 2022

MARDI 19 AVRIL 2022
08h30 - 12h30

FILIERE D2_1

ANALYSE ECONOMIQUE GENERALE

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

1ère Partie :

On étudie le comportement d'une entreprise qui a recours à deux facteurs de production, le travail (l) et le capital (k), afin de produire un bien y. Sa fonction de production s'écrit comme suit :

$$y(l,k) = \sqrt{l} + \sqrt{k}$$

1.1. Les rendements d'échelle de cette entreprise sont-ils croissants, décroissants ou constants ? Justifiez.

1.2. En résolvant le problème de maximisation du profit, calculez les fonctions de demande en facteurs de production, $l(\mathrm{p,w,r})$ et $k(\mathrm{p,w,r})$, où p, w et r, correspondent respectivement aux prix du bien y et des facteurs de production l et k.

1.3. Ces deux facteurs de production sont-ils substituables ou complémentaires ?

1.4. Calculez l'élasticité de substitution entre les 2 facteurs de production.

1.5. Calculez la fonction d'offre de la firme, $y(\mathrm{p,w,r})$.

1.6. En déduire l'expression de la fonction de profit $\pi(p,w,r)$.

1.7. A partir de cette fonction de profit $\pi(p,w,r)$, montrez comment il est possible de retrouver les fonctions de demande en facteurs de production, $l(\mathrm{p,w,r})$ et $k(\mathrm{p,w,r})$, ainsi que la fonction d'offre $y(\mathrm{p,w,r})$.

1.8. En vous appuyant sur le problème de minimisation du coût de production d'une quantité $\bar{y}$, déterminez les fonctions de demande conditionnelles en facteurs de production $l(\mathrm{w,r},\bar{y})$ et $k(\mathrm{w,r},\bar{y})$.

1.9. En déduire l'expression de la fonction de coût, $C(\mathrm{w,r},\bar{y})$.

1.10. Représentez graphiquement l'équilibre du producteur qui minimise son coût de production.

1.11. Toujours en vous appuyant sur une représentation graphique, que devient cet équilibre lorsque r, le prix du capital, diminue ? Justifiez clairement.

1.12. A partir de cette fonction de coût $C(\mathrm{w,r},\bar{y})$, montrez comment il est possible de retrouver les fonctions de demande conditionnelles en facteurs de production $l(\mathrm{w,r},\bar{y})$ et $k(\mathrm{w,r},\bar{y})$.

1.13. Y a-t-il un lien entre la forme de la fonction de coût et les rendements d'échelle de la technologie de cette firme ? Justifiez précisément.

1.14. On suppose désormais que les quantités de facteurs de production sont limitées. Ainsi, l'on suppose que : $k \leq \bar{k},\ l \leq \bar{l}$ mais $\bar{y} < \sqrt{\bar{k}} + \sqrt{\bar{l}}$. L'entreprise minimise son coût de production, pour un niveau de production donné $\bar{y}$.

1.14.1. Représentez graphiquement les différents cas de figure d'équilibre possibles.

1.14.2. Pour chaque cas de figure, déterminez les fonctions de demandes conditionnelles en facteur de production, ainsi que les conditions précises sous lesquelles ces différentes solutions apparaissent.

2ème Partie :

On étudie la relation entre une firme et son employé éventuel. Dans un premier temps, la firme fixe le salaire w qu'elle paie à l'employé. Dans un second temps, s'il accepte la relation contractuelle, le salarié effectue une tâche productive en choisissant son niveau d'effort e, qui génère (pour lui) un coût $C(e) = e^2$. La firme n'est pas en mesure d'imposer le niveau d'effort à son employé. En tenant compte des deux éléments qui le composent, l'utilité du salaire $u(w) = w$ et le coût de l'effort $C(e)$, le gain net de l'employé est donné par l'expression suivante :

$$G(w, e) = u(w) - C(e) = w - e^2$$

La production de la firme dépend du niveau d'effort de l'employé : $y = 100e$. De sorte que le gain net de cette firme est égal à : $\pi(w, e) = 100e - w$.

On supposera, durant toute cette partie, que $w \geq 0, e \geq 0$.

1.1. Sachant que la firme fixe le salaire w et que l'employé choisit son niveau d'effort e, on cherche d'abord à trouver la solution d'équilibre (e^*, w^*) de cette interaction stratégique.

1.1.1. Déterminez l'effort optimal e^* d'un employé qui obtiendrait un salaire w.

1.1.2. En supposant que la firme anticipe parfaitement le comportement de l'employé, quel niveau de salaire w^* proposera-t-elle ?

1.1.3. Que pensez-vous de la situation d'équilibre obtenue ?

1.2. Afin de pouvoir identifier sa meilleure politique salariale possible, la firme résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{w,e} \pi(w, e) = 100e - w \\ s.c.\ \ G(w, e) = w - e^2 \geq 0 \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer le couple $(\hat{w}, \hat{e})$ qui maximise le gain de la firme, tout en respectant la condition de non-négativité du gain de l'employé[1].

1.2.1. Résoudre ce problème (aide : à l'optimum, la contrainte de non-négativité du gain de l'employé est saturée, $G(w, e) = 0$). Quels sont les niveaux de l'effort et du salaire, ainsi que les gains respectifs des deux parties ?

1.2.2. Interprétez le résultat obtenu. En particulier, cette solution vous paraît-elle réalisable ? Pourquoi ?

1.3. On suppose désormais que la firme propose à l'employé un contrat plus sophistiqué impliquant le salaire w, ainsi qu'un intéressement de 40% au profit de la firme. Le gain de l'employé s'écrit donc : $G(w, e) = w + 0.4(100e - w) - e^2$. Le profit de la firme est, quant à lui, égal à : $\pi(w, e) = (1 - 0.4)(100e - w)$.

1.3.1. Dans ce nouveau contexte, déterminez l'effort optimal e^{**} de l'employé.

1.3.2. Toujours en supposant que la firme anticipe parfaitement le comportement de l'employé, quel sera le niveau du salaire w^{**} ?

1.3.3. Que pensez-vous de l'équilibre obtenu ?

[1] Si cette condition n'est pas respectée, l'employé ne participe pas et refuse d'être embauché.

1.3.4. Que deviendrait cet équilibre avec un intéressement de 20% au profit de la firme ? Quels enseignements en retirez-vous ?

1.3.5. Afin de maximiser ses gains, la firme désire maintenant déterminer le taux d'intéressement optimal γ $(0 \leq \gamma \leq 1)$.

1.3.5.1. Ecrivez les expressions des gains $G(w, e)$ et $\pi(w, e)$ qui en résultent.

1.3.5.2. Déterminez, en fonction de γ, le niveau d'effort de l'employé qui maximise son gain.

1.3.5.3. Déduisez-en, du point de vue de la firme, le niveau optimal de γ. Caractérisez la solution obtenue (salaire optimal du point de vue de la firme, gains nets des deux parties).

1.3.5.4. La solution atteinte correspond-elle à un optimum de Pareto ? Justifiez.

1.3.5.5. Le taux d'intéressement optimal et le niveau d'effort seraient-ils affectés par l'obligation légale de verser un salaire de w=3000 ? Justifiez précisément.

1.4. Revenant au contexte de la question (1.1.), on s'interroge sur l'impact de préférences altruistes sur la solution obtenue.

1.4.1. A cet effet, on suppose, dans un premier temps, que seul l'employé est altruiste et qu'il choisit le niveau d'effort qui maximise la somme suivante : $G(w, e) + 0.5\pi(w, e)$.

1.4.1.1. Quel niveau d'effort en résulte ?

1.4.1.2. En supposant que la firme anticipe le comportement de l'employé, quel sera sa politique salariale ? Caractérisez la solution qui en résulte. (Rappelons que la contrainte suivante doit être respectée $G(w, e) = w - e^2 \geq 0$)

1.4.1.3. Quel serait l'impact d'une augmentation du coefficient d'altruisme (égal à 0.5 précédemment) ?

1.4.2. Finalement, on s'intéresse à la solution obtenue lorsque les deux agents, firme et employé, se caractérisent simultanément par des préférences altruistes. L'employé est supposé maximiser la même expression qu'en question (1.4.1). Tandis que la firme maximise l'expression suivante : $\pi(w, e) + 0.5G(w, e)$. Quelle solution obtient-on en supposant que chaque partie anticipe simultanément la réponse optimale de l'autre partie ?

1.4.3. Pensez-vous qu'il soit possible de réaliser une solution optimale en présence de préférences altruistes partagées par les deux types d'agents ? Justifiez.