ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Paris-Saclay

CONCOURS D'ADMISSION 2022

Bqe ENS Paris-Saclay - ENSAI D2
FILIÈRE ECOGESTION opt. 1

MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

- L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Le sujet comporte 3 problèmes indépendants.
- Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Problème 1.

Partie I

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t : x \mapsto t(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Etudier cette fonction et donner son tableau de variation en précisant ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. Tracer une représentation graphique de t sur $\mathbb{R}$.

2. Soit x et y des nombres réels. Démontrer la relation suivante

$$t(x+y) = \frac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}.$$

Partie II

Dans la suite du problème, on étudie les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f(x)| < 1,\ \text{ et } f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}.$$

3. Montrer que $f(0) = 0$.

4. On suppose que f est continue en 0. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

5. On suppose désormais, et jusqu'à la fin du problème, que f est dérivable en 0. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que f est impaire.

On admet, pour la question suivante, que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$.

7. Montrer que f est monotone.

8. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

Montrer que, pour tout nombre réel a, le rapport $\dfrac{g(x+a)}{g(x)}$ est indépendant de x.

9. En déduire les fonctions g, puis f.
Indication : On pourra calculer $g'(x)$.

Problème 2.

Partie I

Lors de l'entretien d'embauche pour un poste de relecteur, l'employeur fournit un texte contenant n erreurs, indépendantes les uns des autres et connues de l'employeur mais pas du relecteur. On numérote les erreurs avec l'indice j allant de 1 à n. On suppose que la probabilité p de repérer une erreur est la même pour toutes les erreurs, et par la suite, on appellera p la qualité du relecteur. On note $X_j = 1$ si l'erreur j est repérée, $X_j = 0$ sinon.

1. Quelle est la loi de probabilité de X_j ? Quelle est son espérance ?

2. Montrer que $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ est un estimateur sans biais de p. Quelle est sa variance ?

3. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, l'erreur quadratique moyenne de $\hat{p}$ définie par

$$EQM(\hat{p}) = \mathbb{E}[\hat{p} - p]^2 + \mathrm{Var}(\hat{p})$$

tend vers 0.

On en conclut que l'on peut estimer p aussi précisément que l'on veut.

Partie II

On donne le texte à plusieurs relecteurs indépendants les uns des autres, chaque relecteur étant indicé par un entier $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'on a une probabilité p de repérer chaque erreur, toujours la même quelque soit le relecteur. Un même relecteur peut repérer plusieurs erreurs et une même erreur peut être repérée par plusieurs relecteurs.

4. On fixe j un entier, $1 \leq j \leq n$ et on ne considère que la j-ième erreur. Soit Y_j la variable aléatoire égale au nombre de relecteurs nécessaires pour repérer cette erreur pour la première fois. Déterminer la loi suivie par Y_j.

5. Calculer la fonction de répartition G_j de Y_j.

6. Soit X donnant le nombre de relecteurs nécessaires pour repérer toutes les erreurs au moins une fois. Exprimer X en fonction des Y_j puis calculer sa fonction de répartition F.

7. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité que $X = k$?

8. S'il n'y a qu'une seule erreur dans le texte, combien faut-il de relecteurs de qualité $p = \frac{1}{2}$ pour avoir au moins autant de chances de repérer l'erreur qu'avec un unique relecteur de qualité $p = \frac{3}{4}$?

9. De même, combien faut-it de relecteurs de qualité $p = \frac{1}{2}$ pour avoir au moins autant de chances de repérer deux erreurs qu'avec le relecteur de qualité $p = \frac{3}{4}$? Peut-on généraliser ?

Problème 3.

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et $I \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice identité. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A, aussi appelé le commutant de A, c'est-à-dire

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Donner deux éléments évidents de $C(A)$.

b. Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.

c. Montrer que si M et M' sont des éléments de $C(B)$ alors MM' est aussi un élément de $C(B)$.

d. Montrer que si $M \in C(B)$ est inversible, alors son inverse M^{-1} est aussi un élément de $C(B)$.

2. Soit D une matrice diagonale appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

a. Soit $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles conditions doit-elle vérifier pour appartenir à $C(D)$?

b. On suppose que les trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont distincts deux à deux. Montrer que M est nécessairement une matrice diagonale.

c. On suppose à présent que $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_3$. Déterminer $C(D)$. Donner une base et la dimension de $C(D)$.

d. Enfin, déterminer $C(D)$ dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

3. On s'intéresse à présent au commutant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et une matrice P que l'on déterminera.

b. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence

$$M \in C(A) \Longleftrightarrow P^{-1}MP \in C(D).$$

c. En déduire la dimension de $C(A)$.

d. Montrer que la famille $\{I, A, A^2\}$ est une base de $C(A)$.