

Concours 1^{ère} année
Économie et Gestion
Session 2023

Mathématiques et Statistiques
Rapport du Jury

Sur 370 candidat·es présent·es, 365 ont composé. Les notes s'échelonnent de 0 à 20. La moyenne générale est de 6,1 (contre 4,6 l'an dernier) et l'écart type de 4,7. L'épreuve était constituée de trois problèmes de difficulté comparable, abordant l'algèbre linéaire, les probabilités et statistiques et l'analyse. Les bonnes copies ont largement abordé tous les problèmes. Inversement, beaucoup de candidat·es ont rapidement été bloqué·es dans chaque problème.

Le jury rappelle que la rédaction est un point important lors d'une épreuve de mathématiques. S'il est inutile de réécrire le sujet au début de ses réponses, il est indispensable de justifier rigoureusement ses calculs et de les conclure par une phrase. De plus, les membres du jury encouragent les candidat·es à écrire leurs raisonnements, y compris s'ils n'ont pas abouti, ainsi qu'à lire le sujet en entier pour repérer les questions auxquelles ils et elles peuvent répondre, ce que certain·es candidat·es ont fait, à raison, pour la fin du problème 2 par exemple.

Problème 1

Le problème 1 est un exercice d'algèbre linéaire, qui a été plutôt bien traité par les étudiant·es. Il a permis d'établir une différence entre les candidat·es qui maîtrisent les notions clés d'algèbre et les candidat·es les plus en difficulté.

Il n'y avait pas de difficultés pour les questions 1 et 2 qui consistaient à montrer que la famille $\mathcal{B}$ était libre et à exprimer la matrice C^2 comme une combinaison linéaire des matrices A , B et C . On obtenait $C^2 = (6, -6, -5)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Pour la question 3, il suffisait de montrer que la famille $\mathcal{B}'$ était une famille libre constituée de 3 vecteurs appartenant à F , de dimension 3. Cette année encore, trop de candidat·es ont écrit, avant de montrer que la famille est libre, que puisque la famille $\mathcal{B}'$ contenait 3 vecteurs de F , elle est génératrice. Étonnamment, même de bonnes copies par ailleurs ont fait cette erreur de raisonnement. Si certains candidat·es se sont trompé·es de sens dans la définition de la matrice de passage P , la plupart de celles et ceux qui ont cherché à inverser la matrice P ont réussi à le faire, en utilisant des méthodes variées. On obtenait les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dernière question n'a pas posé particulièrement de difficulté aux candidat·es qui ont tenté

d'y répondre. On obtenait
$$\begin{cases} x = b - 2c \\ y = -b + c \\ z = a + b \end{cases}.$$

Problème 2

Le problème 2 porte sur la modélisation d'une série de lancers à pile ou face.

Beaucoup de candidat·es identifient les lois binomiale et géométrique (questions 1 et 2). Peu de copies identifient $T_{k+1} - T_k$ comme le nombre de lancers nécessaire à l'apparition du $k + 1$ -ième pile après le k -ième ; il fallait ensuite faire référence à l'indépendance entre les lancers pour traiter la question 3b. Pour la question 4, l'événement $A \cap B$ se décompose comme suit : on tire indépendamment des faces jusqu'à $t_1 - 1$ avec la probabilité q puis un pile en t_1 puis des faces jusqu'à $t_2 - 1$... puis un pile en t_m puis des faces jusqu'à n :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = q^{t_1-1} p q^{t_2-t_1-1} p \dots q^{t_m-t_{m-1}-1} p q^{n-t_m} = q^{n-m} p^m = \left(\frac{p}{q}\right)^m q^n.$$

Par ailleurs, A est la réunion de toutes les combinaisons possibles de m lancers piles parmi n , chacune ayant la même probabilité que celle représentée par $A \cap B$:

$$\mathbb{P}(A) = \binom{n}{m} \left(\frac{p}{q}\right)^m q^n$$

et donc $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{m!(n-m)!}{n!}.$

La question 5 a été assez bien traitée : il s'agit des numéros de tirages du dernier pile avant n , du suivant (c'est-à-dire le premier pile tiré après n) et de l'écart entre les deux.

U_n et V_n définis à la question 6 découpent donc cet intervalle de temps entre les deux piles qui encadrent n . Cette question a été très peu traitée. Dans la question 6a, il fallait observer que si $i = n$, alors il n'y a aucun pile dans les n premiers lancers, et le premier pile arrive au lancer $n + j$, c'est-à-dire $\{U_n = n, V_n = j\} = \{S_n = 0, V_n = j\} = \{T_1 = n + j\}$. Dans le cas où $i < n$, l'évènement $\{U_n = n, V_n = j\}$ correspond à "il y a eu un pile au lancer $n - i$, puis $i - 1$ lancers faces, le n -ième lancer face, et à nouveau $j - 1$ lancers faces jusqu'au pile suivant, au lancer $n + j$ ". On obtenait donc $\mathbb{P}(U_n = n, V_n = j) = \begin{cases} q^{n+j-1} p & \text{si } i = n \\ p^2 q^{i+j-1} & \text{sinon} \end{cases}$. Peu de candidat·es

ont pensé à utiliser la formule des probabilités totales pour calculer $\mathbb{P}(U_n = i)$ et $\mathbb{P}(V_n = j)$ en fonction de $\mathbb{P}(U_n = i, V_n = j)$ dans la question 6b. Un certain nombre de candidat·es a pensé à répondre à la question 6c sur l'indépendance de U_n et V_n , quitte à ne donner que la définition de l'indépendance et commencer le calcul, et ont donc obtenu une partie des points.

On peut ensuite déduire la réponse à la question 7 : $T_{S_{n+1}} - T_{S_n} = U_n + V_n$ donc l'espérance de $T_{S_{n+1}} - T_{S_n}$ est la somme des espérances de U_n et de V_n , soit $\mathbb{E}[U_n] + \frac{1}{p}$ ce qui est plus grand que l'espérance de $T_1 = \frac{1}{p}$.

Problème 3

Le problème 3 s'intéressait aux coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction continue 2π -périodique et à l'inégalité de Bessel. Il n'était pas nécessaire d'avoir de connaissances préalables sur ces notions ni sur les produits scalaires ou les normes pour réussir cet exercice. Certain·es candidat·es se sont montré·es astucieux·ses en utilisant la parité des fonctions, des intégrations par partie ou la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$ pour répondre aux questions de cet exercice, ce qui démontrait leur ténacité et leur capacité à prendre des initiatives pour résoudre

un problème. Les calculs inaboutis et les débuts de raisonnements, quand ils ont du sens, sont toujours valorisés.

La première question consistait à manipuler les formules trigonométriques données en rappel et a été plutôt bien traitée. Pour la question 2, les membres du jury ont été surpris par la proportion de candidats qui ont eu des difficultés à gérer les constantes lorsque l'on intègre une fonction de type $x \mapsto \sin(nx)$. Cette question demandait principalement de reprendre les formules de la question 1.

Les questions 3 et 4a ont été traitées par une grande partie des copies. Attention cependant, il fallait bien vérifier toutes les conditions pour montrer que $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, en particulier que la fonction est bien continue. Pour les questions 4b et 5a, il fallait remarquer que l'on obtenait les quantités calculées à la question 2, ce qui simplifiait chacune des expressions. La question 5b utilisait la question 4b et demandait un peu plus de réflexion, notamment puisqu'il fallait penser à retrancher et ajouter $S_n(f)$ dans le second calcul de la question. Elle a été correctement traitée par quelques très bonnes copies.

Il est conseillé de lire toutes les questions du sujet et de ne pas hésiter à sauter certaines questions pour répondre aux questions suivantes. Par exemple, les dernières questions du problème 3 faisaient appel à des questions de convergence de suites ou se déduisaient rapidement des questions précédentes, et ont été en général bien traitées par les copies qui les ont tentées.