ECOLE NORMALE SUPERIEURE PARIS SACLAY
ENSAI CIVIL
INSEE ATTACHE STATISTICIEN

CONCOURS D’ADMISSION 2023

MARDI 18 AVRIL 2023
08h30 - 12h30

FILIERE ECONOMIE GESTION
OPTION 1

MATHEMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

L’utilisation des calculatrices n’est pas autorisée pour cette épreuve

Le sujet comporte 3 problèmes indépendants.

Si, au cours de l’épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d’énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Problème 1. Algèbre

On considère l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbf{F}$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (A, B, C)$ et pour a, b, c réels, on pose

$$M_{abc} = aA + bB + cC.$$

1. Prouver que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{F}$. Donner la dimension de $\mathbf{F}$.

2. Montrer que la matrice C^2 appartient à $\mathbf{F}$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère les matrices suivantes

$$N_1 = A - B - C, \quad N_2 = 2A - 2B - C, \quad N_3 = A.$$

3. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (N_1, N_2, N_3)$ est une base de $\mathbf{F}$.

4. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Déterminer son inverse.

5. Soit a, b, c trois nombres réels. On note x, y, z les coordonnées de M_{abc} dans $\mathcal{B}'$. On a donc $M_{abc} = xN_1 + yN_2 + zN_3$. Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.

Problème 2. Probabilités et statistiques

On considère un jeu de lancers successifs et indépendants d'une pièce à pile ou face. On note X_i la variable aléatoire représentant le i-ième lancer, $i \in \mathbb{N}^*$. X_i prend la valeur 1 (pile) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et la valeur 0 (face) avec probabilité $q = 1 - p$. Les variables aléatoires X_i sont donc indépendantes et identiquement distribuées.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Que représente S_n ? Quelle est sa loi ? Justifier.

2. On note T_1 le temps d'attente avant l'apparition du premier pile. Ainsi, pour $i \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $\{T_1 = i\} = \{X_1 = 0, \ldots, X_{i-1} = 0, X_i = 1\}$. Déterminer la loi de T_1 et donner son espérance.

3. De façon similaire, pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note T_k le temps d'attente avant l'apparition du k-ième pile. On utilise la convention $T_0 = 0$. Ainsi, $T_k = 0$ si, et seulement si $k = 0$.

a. Que représente le temps $T_{k+1} - T_k$?

b. Montrer que

$$P(T_1 = t_1, \dots, T_m = t_m) = \begin{cases} \left(\dfrac{p}{q}\right)^m q^{t_m}, & \text{si } 0 < t_1 < \dots < t_m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. On suppose qu'au lancer n, on a observé m piles. Posons $A = \{S_n = m\}$ et

$$B = \{T_1 = t_1, \dots, T_m = t_m\}, \quad (t_1 \leq \dots \leq t_m \leq n).$$

Calculer $P(B|A)$, la probabilité conditionnelle de B sachant A.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un lancer particulier. Que représente T_{S_n} ? T_{S_n+1} ? $T_{S_n+1} - T_{S_n}$?
Attention aux indices : on s'intéresse à $S_n + 1$ et non S_{n+1} (ni même $T_{S_n} + 1$).

6. On pose $U_n = n - T_{S_n}$ et $V_n = T_{S_n+1} - n$. On note que les valeurs possibles pour U_n (respectivement V_n) sont $\{0, \dots, n\}$ (respectivement $\mathbb{N}^*$).

a. Calculer $P(U_n = i, V_n = j)$ (On distinguera les cas $i = n$ et $0 \leq i < n$).

b. En déduire que

$$P(U_n = i) = \begin{cases} pq^i & \text{si } 0 \leq i < n \\ q^n & \text{si } i = n, \end{cases} \qquad \text{et} \quad P(V_n = j) = pq^{j-1}.$$

c. En déduire que U_n et V_n sont des variables aléatoires indépendantes.

7. Exprimer $T_{S_n+1} - T_{S_n}$ en fonction de U_n et V_n. En déduire $\mathbb{E}[T_{S_n+1} - T_{S_n}]$ et la comparer à $\mathbb{E}[T_1]$.

Problème 3. Analyse

> Rappel : On rappelle que la fonction cosinus est définie, continue, 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -\sin(x)$ et paire. La fonction sinus est définie, continue, 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \cos(x)$ et impaire. De plus,
>
> $$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
> $$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Dans cet exercice, on considère $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$. On note aussi pour $m \in \mathbb{Z}$ les fonctions c_m et s_m définies sur $\mathbb{R}$ comme suit : $c_m : x \mapsto \cos(mx)$, et $s_m : x \mapsto \sin(mx)$. Pour $f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}$, on définit :

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \quad ||f||^2 := \langle f, f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

1. Montrer que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}, \quad \text{et} \quad \cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}.$$

2. Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\langle c_n, c_m \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = n \neq 0, \\ 2 \text{ si } m = n = 0 \end{cases} \qquad \langle s_n, s_m \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = n \neq 0, \\ 0 \text{ si } m = n = 0 \end{cases} \qquad \langle c_n, s_m \rangle = 0.$$

Dans toute la suite, pour $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$, on définit les coefficients réels :

$$a_{m,f} := \langle f, c_m \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx, \quad b_{m,f} := \langle f, s_m \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx,$$

et $a_{0,f} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $b_{0,f} := 0$.

3. Montrer que si f est paire, $b_{m,f} = 0$ et si f est impaire, $a_{m,f} = 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a_m, b_m \in \mathbb{R}$ pour $m \in \{0, \dots n\}$. On pose

$$g(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{n} \left(a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)\right).$$

a. Montrer que $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$.

b. Montrer que $a_{m,g} = a_m$ et $b_{m,g} = b_m$ pour $m \in \{1, \dots, n\}$ et $a_{0,g} = a_0$.

5. Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $S_n(f) \in \mathscr{C}_{2\pi}$ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(x) := a_{0,f} + \sum_{m=1}^{n} \left(a_{m,f}\cos(mx) + b_{m,f}\sin(mx)\right).$$

a. Montrer que $||S_n(f)||^2 = 2a_{0,f}^2 + \sum_{m=1}^{n} \left(a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2\right)$.

b. Montrer que $\langle f - S_n(f), S_n(f) \rangle = 0$, puis que $||f||^2 = ||S_n(f)||^2 + ||f - S_n(f)||^2$.

c. En déduire que $a_{0,f}^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$.

d. En déduire que la suite $\left(\sum_{m=1}^{n} a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2$ cette limite. En déduire l'inégalité de Bessel :

$$a_{0,f}^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$