ECOLE NORMALE SUPERIEURE PARIS SACLAY
ENSAI CIVIL
INSEE ATTACHE STATISTICIEN

CONCOURS D'ADMISSION 2024

MARDI 16 AVRIL 2024
08h30 - 12h30

FILIERE ECONOMIE GESTION
OPTION 1 - Epreuve n° 2

MATHEMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le sujet comporte 3 problèmes indépendants.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Problème 1.

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3, muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et $f : E \mapsto E$ l'application linéaire associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$. Pour une application linéaire f, la notation f^k désigne l'application f composée k fois avec elle-même, c'est-à-dire $f^2 = f \circ f$ et pour tout $k \geq 2$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

On rappelle que pour deux matrices A et B qui commutent, c'est-à-dire telles que $AB = BA$, on a la formule du binôme de Newton

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

1. Donner $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

2. Déterminer le rang de f. L'application est-elle bijective ? En déduire $\dim(\mathrm{Ker} f)$, la dimension du noyau de f.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k)$, la matrice associée à f^k dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer le rang de f^k et en déduire $\dim(\mathrm{Ker} f^k)$.

4. Soit $v \notin \mathrm{Ker} f^2$. Montrer que $\mathcal{C} = (f^2(v), -f(v), v)$ est une base de E. Écrire $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, la matrice associée à f dans la base $\mathcal{C}$.

5. Vérifier que $e_3 \notin \mathrm{Ker} f^2$.

6. On désigne par P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} lorsque $v = e_3$ en justifiant vos résultats, et vérifier que $M' = P^{-1}MP$.

7. On pose $N = M + I$, où I désigne la matrice identité. Calculer N^n en fonction de M pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de N^n.

8. Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par récurrence par $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $r_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$p_n = 3p_{n-1} + q_{n-1}, \quad q_n = -3p_{n-1} + r_{n-1}, \quad r_n = p_{n-1}.$$

En considérant le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, exprimer la relation de récurrence sous forme matricielle et montrer que $X_n = N^n X_0$.

9. Pour tout entier n, déterminer les expressions de p_n, q_n et r_n en fonction de n.

Problème 2.

Soit $d > 0$, un réel que l'on cherche à estimer. On considère X une variable aléatoire dont la densité est définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{d^2} & \text{si } t \in [0, d], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. a. Vérifier que f est une densité.

b. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathrm{Var}(X)$ de X.

2. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Pour un $p \in \{2, \dots, n-1\}$ fixé, on pose

$$T_1 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} X_i, \quad T_2 = \frac{1}{n-p}\sum_{i=p+1}^{n} X_i$$

$$\text{et} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ D_1(a, b) = aT_1 + bT_2.$$

a. Quelle condition doit vérifier (a, b) pour que $D_1(a, b)$ soit un estimateur sans biais de d ?

b. On s'intéresse aux estimateurs $D_1(a, b)$ sans biais, c'est-à-dire tels que (a, b) vérifie la condition précédente. Parmi ces estimateurs, déterminer celui, noté $D_1^\star$, qui est de variance minimale.

c. Calculer la limite de la variance de $D_1^\star$, $\mathrm{Var}(D_1^\star)$, quand $n \to +\infty$.

3. On note $\widehat{D} = \max(X_1, \cdots, X_n)$.

a. Déterminer la fonction de répartition $\widehat{F}$ et montrer que la densité $\widehat{f}$ de $\widehat{D}$ est définie par

$$\widehat{f}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ et si } t > d, \\ \dfrac{2nt^{2n-1}}{d^{2n}} & \text{si } 0 \leq t \leq d. \end{cases}$$

b. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(\widehat{D})$ et la variance $\mathrm{Var}(\widehat{D})$ de $\widehat{D}$.

c. Calculer la limite de $\mathbb{E}(\widehat{D})$ et $\mathrm{Var}(\widehat{D})$ quand $n \to +\infty$.

d. Déterminer le réel k tel que $k\widehat{D}$ soit un estimateur sans biais de d. On note $D_2^\star$ cet estimateur. Calculer $\mathrm{Var}(D_2^\star)$.

4. Comparer $\mathrm{Var}(D_1^\star)$ et $\mathrm{Var}(D_2^\star)$. Lequel de ces deux estimateurs est préférable ?

Problème 3.

On définit les fonctions $g, h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ par

$$g(t) = (t+1)\ln(t) - 2(t-1),$$
$$h(t) = 2(t^2-1)\ln(t) - 4(1-t)^2.$$

1. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et étudier les variations de g.

2. **a.** Trouver un polynôme P tel que $h = gP$.

b. En déduire les variations de h, et montrer que pour tout $t > 0$, $h(t) \geq 0$.

On s'intéresse maintenant à la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x-y)(\ln(x) - \ln(y)) - 4\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2.$$

3. **a.** Montrer que l'on peut écrire $f(x,y) = x\, h(v(x,y))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ avec v une certaine fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

b. Justifier que $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

4. **a.** Quelle condition nécessaire doit satisfaire (x^*, y^*) pour que f admette un extremum en (x^*, y^*) ?

b. Avec le changement de variable $t = \dfrac{y}{x}$, conclure sur les possibles extrema de f.

On pourra utiliser l'égalité $t + \dfrac{1}{t} = \left(\sqrt{t} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 - 2.$

c. Montrer que f admet un minimum global.