Concours DUT-BTS
École normale supérieure Paris-Saclay

Épreuve de Mathématiques

Session 2024

Durée : 2 heures

Consignes :

Chaque question est associée à 5 propositions.
Le candidat devra, pour chaque proposition, indiquer si celle-ci est vraie ou fausse en noircissant la case appropriée du document réponse.
Il n'y a pas de contrainte sur le nombre de propositions vraies ou fausses par question.
Les mauvaises réponses sont pénalisées, en revanche l'absence de réponse ne l'est pas.

Avertissement :

Tous les candidats doivent traiter les questions 1 à 9.
Seuls les candidats de l'option Génie Électrique doivent traiter les questions 10, 11 et 12.
Seuls les candidats des options Génie Mécanique et Génie Civil doivent traiter les questions 13, 14 et 15.

Les questions qui ne correspondent pas à l'option du candidat ne seront pas corrigées.
L'usage de calculatrice, de téléphone et de montre connectée est interdit.

Question 1 Soit (H) l'équation différentielle homogène : $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$
(E_1) l'équation différentielle : $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 15t + 2$
(E_2) l'équation différentielle : $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2(t + 1)e^{-t}$

[A] La solution générale de (H) est $y(t) = Ae^{-2t}cos(t) + Be^{-2t}sin(t)$

[B] La seule solution de (H) vérifiant $y(\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{4}) = 0$ est la fonction nulle

[C] Il existe une unique solution de (H) vérifiant $y(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$

[D] La seule solution de (H) vérifiant $y(\pi) = 1$ et $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ est

$$y(t) = e^{(\pi-2t)}\,[cos(t) - sin(t)]$$

[E] La seule solution de (H) qui vérifie $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $y'(0) = 0$ est $y(t) = e^{\pi-2t}sin(t)$

Question 2 On reprendra les notations de la question précédente.

[A] L'unique solution polynomiale de (E_1) est $y(t) = 3t + 2$

[B] Il n'existe pas de solution de (E_1) telle que $y(0) = -3$

[C] Il existe une solution de (E_2) de la forme $y(t) = P(t)e^{-t}$ avec $P(t)$ un polynôme en t de degré inférieur ou égal à 1

[D] Les solutions générales de (E_2) sont de la forme

$$y(t) = Ae^{-2t}cos(t) + Be^{-2t}sin(t) + 2(t + 1)e^{-t}$$

[E] Il existe une ou plusieurs solution de (E_2) admettant une limite finie en $-\infty$

Question 3 Soient les polynômes $P(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1$ et $Q(x) = x^3 + x + 1$. En faisant la division euclidienne de P par Q et en la mettant sous la forme $P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$, décomposer puis calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

[A] On a $A(x) = x^2 - x + 2$

[B] On a $R(x) = x^2 + 1$

[C] On a $\int_0^1 A(x)dx = 2$

[D] On a $\int_0^1 \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 1}dx = \ln(3)$

[E] On a $I = \frac{11}{6} + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^3 + x + 1}dx$

Question 4 Soit la fonction de variable réelle f définie par $f(x) = ln(\sqrt{1-x^2})$. On note D son domaine de définition.

[A] Le domaine de définition de f est $D = [-1; 1]$

[B] On a $f'(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

[C] Sur D, f prend toutes les valeurs sur l'intervalle $]-\infty; 0[$

[D] $f(x) = \dfrac{-1}{2}$ admet une unique solution sur D

[E] Une représentation graphique de f admet une tangente verticale d'équation $x = 1$

Question 5 Soit f une fonction de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{J}$. Soient les 4 propositions suivantes :

$$\forall x \in \mathcal{I}, \exists y \in \mathcal{J} \,/\, f(x) = y \tag{P1}$$

$$\forall y \in \mathcal{J} \,/\, \exists x \in \mathcal{I},\ f(x) = y \tag{P2}$$

$$\forall y \in \mathcal{J}, \exists x \in \mathcal{I} \,/\, f(x) \neq y \tag{P3}$$

$$\exists x \in \mathcal{I} \,/\, \forall y \in \mathcal{J},\ f(x) \neq y \tag{P4}$$

[A] La proposition P1 implique la surjectivité de f

[B] La négation de P3 implique que f soit une fonction constante

[C] P4 et P2 sont négations l'une de l'autre

[D] La proposition P4 est impossible

[E] Il est possible de vérifier P2 et de ne pas vérifier P3

Question 6 Pour un entier naturel n on se propose d'étudier la convergence et éventuellement de calculer l'intégrale I_n définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} dx$

[A] On a $\dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$

[B] On a $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

[C] Pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n converge

[D] À l'aide d'une intégration par parties, on montre que pour tout $n \geq 2$, on a

$$I_n = \frac{1}{n-1} I_{n+1}$$

[E] Pour tout entier $n \geq 2$, on a $I_n = n!$

Question 7 Soit la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{(1+x)e^{-x} - \cos(ax)}{x^3}$ où a est un réel fixé.

[A] La fonction f_a est impaire

[B] Un D.L. de e^{-x} à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

[C] Un D.L. de $(1+x)e^{-x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

[D] Un D.L. de $\cos(ax)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 est $1 - \dfrac{ax^2}{2} + \dfrac{ax^4}{4} + o(x^4)$

[E] Pour que f_a admette une limite finie en 0, il faut et il suffit que $a^2 = 1$

Question 8 Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n.

[A] Lorsque $n = 3$, la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est liée

[B] Lorsque $n = 4$, la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, e_4 + e_1)$ est liée

[C] Les polynômes $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = X + X^2$ et $P_3 = X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$

[D] Les vecteurs $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (2, -1, -1)$, $u_3 = (-1, 3, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

[E] Les vecteurs $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, -1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -5)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 9 On s'intéresse au suivi de température T au sein d'un glacier. Le modèle retenu pour modéliser son évolution à l'instant t à la profondeur x est :

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

[A] Avec ce modèle, on peut écrire $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \lambda T_1 e^{-\lambda x} (\cos(\omega t - \lambda x) - \sin(\omega t - \lambda x))$

[B] Avec ce modèle, on peut écrire $\dfrac{\partial T}{\partial t} = T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$

[C] Avec ce modèle, on peut écrire $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2T_1 \lambda^2 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$

[D] Avec ce modèle, on peut écrire $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{1}{2\lambda^2} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

[E] En considérant la loi des gazs parfaits $PV = nRT$, on a

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = 1$$

Les question 10, 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option Génie Électrique.

Question 10 Soit f une fonction 2π-périodique définie par $f(t) = t$ sur $]-\pi;\pi]$.

On notera $Sf(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$, la série de Fourier de f.

[A] La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$

[B] La série de Fourier Sf converge vers f sur $]-\pi;\pi[$

[C] $Sf(\pi) = \pi$

[D] La fonction f est paire

[E] L'ensemble des coefficients a_k sont nuls

Question 11 Cette question reprend les notations et définitions précédentes.

[A] $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = \dfrac{-2}{k}$

[B] $\forall t \in]-\pi,\pi[$, $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}sin(kt)}{k} = \dfrac{t}{2}$

[C] La série de Fourier Sf s'annule en $t = \pi$

[D] $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{2}$

[E] L'identité de Bassel-Parseval donne $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Question 12 Dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé, on associe à chaque nombre complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un point M d'affixe z et de coordonnées (x, y). Soit la fonction $f : \mathbb{C}\setminus\{-i\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z^2}{z+i}$$

On considère l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ des points du plan d'affixes $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-i\}$ tels que $|f(z)| = |z|$, ainsi que l'ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ des points d'affixes $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-i\}$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

[A] L'ensemble $\mathcal{D}$ est constitué des points d'affixes $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-i\}$ tels que $|z| = |z+i|$

[B] L'ensemble $\mathcal{D}$ est un cercle

[C] Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}\setminus\{0,-i\}$ la partie réelle de $f(z)$ est

$$Re\left(f\left(x+iy\right)\right) = \frac{x(x^2+y^2+2x)}{x^2+(1+y)^2}$$

[D] L'ensemble $\mathcal{E}$ est l'union d'un cercle et d'une droite privée des points de coordonnées $(0,0)$ et $(0,-1)$

[E] L'intersection $\mathcal{D}\bigcap\mathcal{E}$ est constitué de deux points du plan $\mathcal{P}$.

Les question 13, 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option Génie Mécanique et Génie Civil.

Question 13 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

[A] Le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = x(1-x)(1+x)$

[B] Le scalaire 0 est une valeur propre de A

[C] Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A

[D] Le vecteur $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1

[E] La matrice inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Question 14 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on se donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On notera $\vec{a}.\vec{b}$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $\vec{a} \wedge \vec{b}$ leur produit vectoriel.

[A] $\vec{u}.\vec{v} = 1$

[B] $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

[C] $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$

[D] $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{v} = 0$

[E] Pour tout vecteur $\vec{x}$, on a $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{x} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{x})$

Question 15 On considère un espace affine euclidien de dimension 3, muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans cet espace on considère l'origine $O(0,0,0)$ et les points $A(1,-1,0)$ et $B(0,1,1)$. On note P le plan (OAB) et Q le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.
L'intersection de P et Q est la droite Δ. On s'intéresse ensuite au cylindre de révolution d'axe Δ et de rayon 1. Celui-ci sera noté Γ.

[A] Le plan P a pour équation $x + y - z = 0$

[B] Une équation de Q est $x = 1$

[C] Le vecteur $\vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ

[D] La distance au carré d'un point $M(x,y,z)$ à la droite Δ vaut $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{(y-z)^2}{\sqrt{2}}$

[E] Le point $C(-1,2,2)$ appartient à Γ