

# Épreuve de Mathématiques

Session 2025

Durée : 2 heures

## Consignes :

Chaque question est associée à 5 propositions.

Le candidat devra, pour chaque proposition, indiquer si celle-ci est vraie ou fausse en noircissant la case appropriée du document réponse.

Il n'y a pas de contrainte sur le nombre de propositions vraies ou fausses par question.

Les mauvaises réponses sont pénalisées, en revanche l'absence de réponse ne l'est pas.

## Avertissement :

Tous les candidats doivent traiter les questions 1 à 9.

Seuls les candidats de l'option Génie Électrique doivent traiter les questions 10, 11 et 12.

Seuls les candidats des options Génie Mécanique et Génie Civil doivent traiter les questions 13, 14 et 15.

Les questions qui ne correspondent pas à l'option du candidat ne seront pas corrigées.

L'usage de calculatrice, de téléphone et de montre connectée est interdit.

---

**Question 1** Soit  $(H)$  l'équation différentielle homogène :  $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$   
 $(E_1)$  l'équation différentielle :  $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 9$   
 $(E_2)$  l'équation différentielle :  $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 3e^{2t}$

- [A] Les solutions de  $(H)$  sont de la forme  $y(t) = \lambda e^{-3t}$  avec  $\lambda$  une constante.
- [B] La seule solution de  $(H)$  vérifiant  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$  est la fonction nulle.
- [C] La seule solution de  $(H)$  vérifiant  $y(0) = 0$  et  $y'(1) = 1$  est la fonction  $y(t) = -\frac{t}{2}e^{3(1-t)}$ .
- [D] Il existe une unique solution de  $(H)$  vérifiant  $y'(0) = -3y(0)$ .
- [E] Il existe une unique solution de  $(H)$  vérifiant  $y(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

**Question 2** On reprendra les notations de la question précédente.

- [A] La solution particulière de  $(E_1)$  est la fonction constante  $y(t) = 1$ .
- [B] La seule solution de  $(E_1)$  vérifiant  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$  est la fonction nulle.
- [C] La solution particulière de  $(E_2)$  est  $y(t) = 3e^{2t}$ .
- [D] Les solutions de  $(E_2)$  sont de la forme  $y(t) = 3(\lambda t + \mu)e^{-t}$ .
- [E] Il n'existe pas de solution de  $(E_2)$  tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

**Question 3** Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe et  $M$  un point du plan complexe d'affixe  $z$ . On définit :  $W(z) = \frac{z-1}{z+2i}$  et  $T(z) = \frac{z+1-i}{z-3}$ .

- [A] L'ensemble des points  $M(z)$  tels que la partie réelle de  $W$  soit nulle est une droite d'équation  $y = -x + 1$ .
- [B] L'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $T$  soit réel est une droite d'équation  $y = -3x + 5$ .
- [C] Le complexe nul  $z_1 = 0 + 0i$  satisfait à la fois  $Re(W) = 0$  et  $Im(T) = 0$ .
- [D] L'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $|W| = 1$  est un cercle de centre  $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .
- [E] Il existe un unique point  $M(z)$  respectant simultanément  $Im(T) = 0$  et  $|W| = 1$ .

**Question 4** Soit la fonction  $f_a : x \mapsto \frac{(1+2x)e^{-x} - \sin(ax)}{x^2}$  où  $a$  est un réel fixé.  $\varepsilon(x)$  représentera une fonction quelconque qui a pour limite 0 en 0.

- [A] La fonction  $f_a$  est impaire.
- [B] Un D.L. de  $e^{-x}$  à l'ordre 3 au voisinage de 0 est  $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ .
- [C] Un D.L. de  $(1+2x)e^{-x}$  à l'ordre 3 au voisinage de 0 est  $1 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ .
- [D] Un D.L. de  $\sin(ax)$  à l'ordre 3 au voisinage de 0 est  $ax - \frac{a^3x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ .
- [E] Pour que  $f_a$  admette une limite finie en 0, il faut et il suffit que  $a = -1$ .

---

**Question 5** Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{J}$ . Soient les 4 propositions suivantes :

$$\forall x \in \mathcal{I}, \exists y \in \mathcal{J} / f(x) = y \quad (\text{P1})$$

$$\forall y \in \mathcal{J}, \exists x \in \mathcal{I} / f(x) = y \quad (\text{P2})$$

$$\forall y \in \mathcal{J}, \exists x \in \mathcal{I} / f(x) \neq y \quad (\text{P3})$$

$$\exists x \in \mathcal{I} / \forall y \in \mathcal{J}, f(x) \neq y \quad (\text{P4})$$

- [A] La proposition P1 implique que  $f$  est injective.
- [B] La négation de P1 correspond à P4.
- [C] La proposition P2 implique la surjectivité.
- [D] La proposition P3 est toujours vérifiée pour toute fonction  $f$ .
- [E] Il est possible que P1 soit vérifiée sans que P2 le soit.

**Question 6** Soit la fonction réelle  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 2x^3}$ .

- [A] La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{2}\}$  et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{2x(1-x)}{\sqrt[3]{x(3-2x)^2}}.$$

- [B] La fonction  $f$  est croissante si  $x < \frac{3}{2}$  et décroissante sinon.
- [C] La représentation graphique de  $f$  admet une tangente verticale en  $x = 0$ .
- [D] La fonction  $f$  a un maximum unique en  $x = 0$ .
- [E] La fonction  $f$  a un minimum local unique en  $x = \frac{3}{2}$ .

**Question 7** Soit  $u > 0$  et la fonction définie par  $F(u) = \int_0^u e^x \cos(\pi x) dx$ . On pose également  $G(u) = \int_0^u e^x \sin(\pi x) dx$ .

- [A] On a  $F(u) = e^u \cos(\pi u) - 1 + G(u)$ .
- [B] On a  $G(u) = e^u \sin(\pi u) - \pi F(u)$ .
- [C] On a  $(1 + \pi^2)F(u) = e^u (\cos(\pi u) + \pi \sin(\pi u)) - 1$ .
- [D] On a  $F(1) = \frac{e - 1}{1 + \pi^2}$ .
- [E] On a  $\lim_{u \rightarrow -\infty} F(u) = 1 + \pi^2$ .

---

**Question 8** Soient les polynômes  $P(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$  et  $Q(x) = x^2 + x + 1$ . En faisant la division euclidienne de  $P$  par  $Q$  et en la mettant sous la forme  $P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$ , décomposer puis calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ .

- [A] On a  $A(x) = -x^2 + x + 3$ .
- [B] On a  $R(x) = 6x + 3$ .
- [C] on a  $\int_0^1 A(x)dx = \frac{19}{6}$ .
- [D] On a  $\int_0^1 \frac{-6x - 3}{x^2 + x + 1} dx = \ln(3)$ .
- [E] On a donc  $I = \frac{19}{6} - 3\ln(3)$ .

**Question 9** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre d'un espace vectoriel  $\mathcal{E}$  de dimension  $n$ .

- [A] Lorsque  $n = 3$ , la famille  $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$  est libre.
- [B] Lorsque  $n = 4$ , la famille  $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, e_4 + e_1)$  est liée.
- [C] Les polynômes  $P_1 = 1 + X + X^2$ ,  $P_2 = X + X^2$  et  $P_3 = X^2$  forment une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- [D] Les vecteurs  $u_1 = (1, -1, 1)$ ,  $u_2 = (2, -1, -1)$ ,  $u_3 = (-1, 3, 1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- [E] Les vecteurs  $v_1 = (1, -1, 1)$ ,  $v_2 = (2, -1, -1)$ ,  $v_3 = (1, 1, -5)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

---

Les questions 10, 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option Génie Électrique.

**Question 10** Soit  $f(x) = |\cos(x)|$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . On note

$$sf(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(2kx) + b_k \sin(2kx)), \text{ la série de Fourier de } f.$$

[A] La fonction  $f$  est  $\pi$ -périodique et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

[B] La série de Fourier de  $f$  converge vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

[C] La fonction est impaire.

[D] Les coefficients  $b_k$  sont tous nuls.

[E]  $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) \cos(kx) dx.$

**Question 11** Cette question reprend les notations et définitions précédentes.

[A]  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 2\cos(x)\cos(kx) = \cos((k+1)x) + \cos((k-1)x).$

[B]  $a_0 = \frac{2}{\pi}.$

[C]  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, a_k = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1} \right).$

[D]  $a_k = 0$  si  $k$  est impair et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{2n} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{(n+1)}}{2n-1} \right).$

[E] En évaluant  $f$  en 0, on trouve  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{(n+1)}}{2n-1} \right) = \frac{\pi - 4}{2\pi}.$

**Question 12** Dans un plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé, on associe à chaque nombre complexe  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  un point  $M$  d'affixe  $z$  et de coordonnées  $(x, y)$ . Soit la fonction  $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$f(z) = \frac{z^2}{i - z}$$

On considère l'ensemble  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$  des points du plan d'affixes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, i\}$  tels que  $|f(z)| = |z|$ , ainsi que l'ensemble  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$  des points d'affixes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$  tels que  $f(z)$  soit imaginaire pur.

[A] L'ensemble  $\mathcal{D}$  est constitué des points d'affixes  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $|z| = |z - i|$ .

[B] L'ensemble  $\mathcal{D}$  est un cercle.

[C] Pour tout  $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$  la partie réelle de  $f(z)$  est

$$\operatorname{Re}(f(x + iy)) = -\frac{x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}$$

[D] L'ensemble  $\mathcal{E}$  est l'union d'un cercle et d'une droite privée du point de coordonnées  $(0, 1)$ .

[E] L'équation  $x^2 + y^2 - 2y = 0$  est celle du cercle de centre  $(0, 1)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

---

Les question 13, 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option Génie Mécanique et Génie Civil.

**Question 13** Soit la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .

- [A] Le polynôme caractéristique de  $B$  est  $P_B(x) = (1-x)(x-3)^2$ .
- [B] Le scalaire 0 est une valeur propre de  $B$ .
- [C] Le vecteur  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $B$ .
- [D] Le vecteur  $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre 1.
- [E] La matrice inverse de  $B$  est  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ .

**Question 14** On considère un espace affine euclidien de dimension 3, muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Dans cet espace on considère l'origine  $O(0, 0, 0)$  et les points  $A(1, -1, 0)$  et  $B(0, 1, 1)$ . On note  $P$  le plan  $(OAB)$  et  $Q$  le plan  $(O, \vec{j}, \vec{k})$ .

L'intersection de  $P$  et  $Q$  est la droite  $\Delta$ . On s'intéresse ensuite au cylindre de révolution d'axe  $\Delta$  et de rayon 1. Celui-ci sera noté  $\Gamma$ .

- [A] Le plan  $P$  a pour équation  $x + y - z = 0$ .
- [B] Une équation de  $Q$  est  $x = 1$ .
- [C] Le vecteur  $\vec{j} + \vec{k}$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ .
- [D] La distance au carré d'un point  $M(x, y, z)$  à la droite  $\Delta$  vaut  $\sqrt{2}x^2 + \frac{(y-z)^2}{\sqrt{2}}$ .
- [E] Le point  $C(-1, 2, 2)$  appartient à  $\Gamma$ .

**Question 15** Soit  $u_n$  une suite de  $\mathbb{R}$  vérifiant  $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$ . On pose  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$

- [A] Si  $u_0 = 1$ , la suite  $u_n$  est constante et égale à 1.
- [B] La suite  $v_n$  est une suite géométrique de raison  $1/4$ .
- [C]  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(\frac{v_0}{3}\right)^n$ .
- [D] On a  $u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$ .
- [E]  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{u_0}{u_0 - 3^n(1 - u_0)}$ .