

Épreuve de Mathématiques

Session 2026

Durée : 2 heures

Consignes :

Chaque question est associée à 5 propositions.

Le candidat devra, pour chaque proposition, indiquer si celle-ci est vraie ou fausse en noircissant la case appropriée du document réponse.

Il n'y a pas de contrainte sur le nombre de propositions vraies ou fausses par question.

Les mauvaises réponses sont pénalisées, en revanche l'absence de réponse ne l'est pas.

Avertissement :

Tous les candidats doivent traiter les questions 1 à 9.

Seuls les candidats de l'option Génie Électrique doivent traiter les questions 10, 11 et 12.

Seuls les candidats de l'option Génie Mécanique doivent traiter les questions 13, 14 et 15.

Seuls les candidats de l'option Génie Civil doivent traiter les questions 16, 17 et 18.

Les questions qui ne correspondent pas à l'option du candidat ne seront pas corrigées.

L'usage de calculatrice, de téléphone et de montre connectée est interdit.

Question 1 Soit (H) l'équation différentielle homogène : $2y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$
 (E_1) l'équation différentielle : $2y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 3t$
 (E_2) l'équation différentielle : $2y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = (-2t + 1)e^{-t}$

- [A] La solution générale de (H) est $y(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$
- [B] La seule solution de (H) vérifiant $y(\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{4}) = 0$ est la fonction nulle
- [C] Il existe une unique solution de (H) vérifiant $y(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$
- [D] La seule solution de (H) vérifiant $y(\pi) = 1$ et $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ est $y(t) = e^{(\pi-t)} (\cos(t) - \sin(t))$
- [E] La seule solution de (H) qui vérifie $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $y'(0) = 0$ est $y(t) = e^{\pi-t} \sin(t)$

Question 2 On reprendra les notations de la question précédente.

- [A] L'unique solution polynomiale de (E_1) est $y(t) = \frac{3}{4}t$
- [B] Il n'existe pas de solution de (E_1) telle que $y(0) = -\frac{3}{4}$
- [C] Il existe une solution de (E_2) de la forme $y(t) = P(t)e^{-t}$ avec $P(t)$ un polynôme en t de degré inférieur ou égal à 1
- [D] Les solutions générales de (E_2) sont de la forme $y(t) = \left(A\cos(t) + B\sin(t) - t + \frac{1}{2} \right) e^{-t}$
- [E] Il existe une infinité de solution de (E_2) admettant une limite finie en $-\infty$

Question 3 Soient les polynômes $P(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1$ et $Q(x) = x^3 + x + 1$. En faisant la division euclidienne de P par Q et en la mettant sous la forme $P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$, décomposer puis calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

- [A] On a $A(x) = x^2 - x + 2$
- [B] On a $R(x) = x^2 + 1$
- [C] On a $\int_0^1 A(x) dx = 2$
- [D] On a $\int_0^1 \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 1} dx = \ln(3)$
- [E] On a $I = \frac{11}{6} + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{x^3 + x + 1} dx$

Question 4 Soit la fonction de variable réelle f définie par $f(x) = \ln(\sqrt{1-x^2})$. On note D son domaine de définition.

- [A] Le domaine de définition de f est $D = [-1; 1]$
- [B] On a $f'(x) = \frac{x}{1-x^2}$
- [C] Sur D , f prend toutes les valeurs sur l'intervalle $] -\infty; 0[$
- [D] $f(x) = \frac{-1}{2}$ admet une unique solution sur D
- [E] Une représentation graphique de f admet une tangente verticale d'équation $x = 1$

Question 5 Soit f une fonction de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{J}$. Soient les 4 propositions suivantes :

$$\forall x \in \mathcal{I}, \exists y \in \mathcal{J} / f(x) = y \quad (\text{P1})$$

$$\forall y \in \mathcal{J}, \exists x \in \mathcal{I} / f(x) = y \quad (\text{P2})$$

$$\forall y \in \mathcal{J}, \exists x \in \mathcal{I} / f(x) \neq y \quad (\text{P3})$$

$$\exists x \in \mathcal{I} / \forall y \in \mathcal{J}, f(x) \neq y \quad (\text{P4})$$

- [A] La proposition P1 implique que f est injective.
- [B] La négation de P1 correspond à P4.
- [C] La proposition P2 implique la surjectivité.
- [D] La proposition P3 est toujours vérifiée pour toute fonction f .
- [E] Il est possible que P1 soit vérifiée sans que P2 le soit.

Question 6 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe et M un point du plan complexe d'affixe z . On définit : $W(z) = \frac{z-1}{z+2i}$ et $T(z) = \frac{z+1-i}{z-3}$.

- [A] L'ensemble des points $M(z)$ tels que la partie réelle de W soit nulle est une droite d'équation $y = -x + 1$.
- [B] L'ensemble des points $M(z)$ tels que T soit réel est une droite d'équation $y = -3x + 5$.
- [C] Le complexe nul $z_1 = 0 + 0i$ satisfait à la fois $Re(W) = 0$ et $Im(T) = 0$.
- [D] L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|W| = 1$ est un cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
- [E] Il existe un unique point $M(z)$ respectant simultanément $Im(T) = 0$ et $|W| = 1$.

Question 7 Soit $u > 0$ et la fonction définie par $F(u) = \int_0^u e^x \cos(\pi x) dx$. On pose également $G(u) = \int_0^u e^x \sin(\pi x) dx$.

- [A] On a $F(u) = e^u \cos(\pi u) - 1 + G(u)$.
- [B] On a $G(u) = e^u \sin(\pi u) - \pi F(u)$.
- [C] On a $(1 + \pi^2)F(u) = e^u (\cos(\pi u) + \pi \sin(\pi u)) - 1$.
- [D] On a $F(1) = \frac{e - 1}{1 + \pi^2}$.
- [E] On a $\lim_{u \rightarrow -\infty} F(u) = 1 + \pi^2$.

Question 8 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n .

- [A] Lorsque $n = 3$, la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est liée
- [B] Lorsque $n = 4$, la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, e_4 + e_1)$ est liée
- [C] Les polynômes $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = X + X^2$ et $P_3 = X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$
- [D] Les vecteurs $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (2, -1, -1)$, $u_3 = (-1, 3, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$
- [E] Les vecteurs $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, -1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -5)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 9 On s'intéresse au suivi de température T au sein d'un glacier. Le modèle retenu pour modéliser son évolution à l'instant t à la profondeur x est :

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

- [A] Avec ce modèle, on peut écrire $\frac{\partial T}{\partial x} = \lambda T_1 e^{-\lambda x} (\cos(\omega t - \lambda x) - \sin(\omega t - \lambda x))$
- [B] Avec ce modèle, on peut écrire $\frac{\partial T}{\partial t} = T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$
- [C] Avec ce modèle, on peut écrire $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2T_1 \lambda^2 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$
- [D] Avec ce modèle, on peut écrire $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{2\lambda^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
- [E] En considérant la loi des gaz parfaits $PV = nRT$, on a

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = 1$$

Les questions 10, 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option Génie Électrique.

Question 10 Soit $f(x) = |\cos(x)|$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note

$$sf(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(2kx) + b_k \sin(2kx)), \text{ la série de Fourier de } f.$$

[A] La fonction f est π -périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

[B] La série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$.

[C] La fonction est impaire.

[D] Les coefficients b_k sont tous nuls.

[E] $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) \cos(kx) dx.$

Question 11 Cette question reprend les notations et définitions précédentes.

[A] $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 2\cos(x)\cos(kx) = \cos((k+1)x) + \cos((k-1)x).$

[B] $a_0 = \frac{2}{\pi}.$

[C] $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, a_k = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1} \right).$

[D] $a_k = 0$ si k est impair et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{2n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{(n+1)}}{2n-1} \right).$

[E] En évaluant f en 0, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{(n+1)}}{2n-1} \right) = \frac{\pi - 4}{2\pi}.$

Question 12 Dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé, on associe à chaque nombre complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un point M d'abscisse x et de coordonnées (x, y) . Soit la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z^2}{i - z}$$

On considère l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ des points du plan d'abscisses $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, i\}$ tels que $|f(z)| = |z|$, ainsi que l'ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ des points d'abscisses $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

[A] L'ensemble $\mathcal{D}$ est constitué des points d'abscisses $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = |z - i|$.

[B] L'ensemble $\mathcal{D}$ est un cercle.

[C] Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ la partie réelle de $f(z)$ est

$$\operatorname{Re}(f(x + iy)) = -\frac{x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}$$

[D] L'ensemble $\mathcal{E}$ est l'union d'un cercle et d'une droite privée du point de coordonnées $(0, 1)$.

[E] L'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ est celle du cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Les question 13, 14 et 15 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option Génie Mécanique

Question 13 On considère un espace affine euclidien de dimension 3, muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans cet espace on considère l'origine $O(0, 0, 0)$ et les points $A(1, 0, 1)$ et $B(0, 1, 0)$. On note P le plan (OAB) et Q le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

L'intersection de P et Q est la droite Δ . On s'intéresse ensuite au cylindre de révolution d'axe Δ et de rayon 2. Celui-ci sera noté Γ .

- [A] Le plan P a pour équation $x - z = 0$
- [B] Une équation de Q est $y = 0$
- [C] Les plans P et Q sont parallèles.
- [D] Le vecteur directeur de Δ est $\vec{i} - \vec{k}$
- [E] La distance d'un point $M(x, y, z)$ à la droite Δ est la somme des distances du point M aux plans P et Q .

Question 14 Cette question reprend les notations de la question précédente.

- [A] La distance au carré de $M(x, y, z)$ au plan P est $\frac{(x-1)^2 + (z-1)^2}{2}$
- [B] La distance au carré de $M(x, y, z)$ à la droite Δ est $y^2 + \frac{(x-z)^2}{2}$
- [C] Le cylindre Γ a pour équation $\frac{(x-z)^2}{2} + y^2 = 2$
- [D] Le point $C(1, 1, 1)$ appartient à Δ .
- [E] Le point $D(0, 2, 0)$ appartient à Γ .

Question 15 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note I la matrice identité d'ordre 3.

- [A] On a $A^2 = 3A + 6I$
- [B] Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A
- [C] Le scalaire 3 est valeur propre de A
- [D] Il existe 2 suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n :
 $A^n = a_n A + b_n I$
- [E] Pour tout entier naturel non nul n on a : $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$

Les questions 16, 17 et 18 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option Génie Civil.

Question 16 On considère un espace vectoriel E , de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un endomorphisme f de E a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On pose $g = f - Id$, de matrice $B = A - I$ dans la base $\mathcal{B}$, I étant la matrice de l'application identité de E notée Id .

- [A] On a $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- [B] On a $A^3 = 3A^2 - 2A$
- [C] On a $(A - I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$
- [D] On a $B^3 = B$
- [E] g est un projecteur.

Question 17 Cette question reprend les notations de la question précédente.

- [A] Le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$
- [B] Les valeurs propres de A sont $\{0; 1; -2\}$
- [C] f est un automorphisme de E
- [D] A est diagonalisable.
- [E] A^2 admet une valeur propre double.

Question 18 Soit un espace affine euclidien de dimension 3 muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les deux plans $P_1 : x + 2y - 5 = 0$ et $P_2 : x + y + z - 3 = 0$. On définit la droite D intersection de ces deux plans : $D = P_1 \cap P_2$.

- [A] La droite D admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = t \\ z = -2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- [B] Le plan P_3 perpendiculaire à la droite D et passant par le point $A(1, 0, -1)$ a pour équation $-2x + y + z + 3 = 0$.
- [C] Le plan P_3 est parallèle au plan P_1 .
- [D] Les 3 plans P_1 , P_2 et P_3 sont sécants au point $M(\frac{-7}{6}, \frac{5}{6}, \frac{10}{3})$
- [E] La droite Δ intersection de P_2 et P_3 est parallèle à $\vec{i}$