CX5611

Banque commune École Polytechnique - InterENS

PSI

Session 2015

Épreuve de Mathématiques

Durée: 4 heures

Aucun document n'est autorisé

Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, on adopte les notations suivantes :

- Pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re e(z)$ et $\Im m(z)$ désignent les parties réelle et imaginaire de z respectivement, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z, et $|z|$ le module de z.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Pour $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ désigne le produit vectoriel de u et v. On pourra utiliser librement la formule du double produit vectoriel
$$\forall (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $u \cdot v$ désigne le produit scalaire euclidien de u et v et $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Lorsque $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $f(t,\cdot) : x \mapsto f(t,x)$ et $f(\cdot,x) : t \mapsto f(t,x)$ les applications partielles correspondantes.
  Pour $t \in I$, si l'application partielle $f(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot) \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ses dérivées.
  Pour $x \in \mathbb{R}$, si l'application partielle $f(\cdot,x) \in C^1(I,\mathbb{C})$, on note $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,x) \in C(I,\mathbb{C})$ sa dérivée.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Lorsque $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(t,x) \mapsto (f_1(t,x), f_2(t,x), f_3(t,x))$, on note $f(t,\cdot) : x \mapsto f(t,x)$ et $f(\cdot,x) : t \mapsto f(t,x)$ les applications partielles correspondantes.
  Pour $t \in I$, si $f(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$, on note
$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,\cdot), \frac{\partial f_2}{\partial x}(t,\cdot), \frac{\partial f_3}{\partial x}(t,\cdot)\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot) = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(t,\cdot), \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(t,\cdot), \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(t,\cdot)\right).$$
  Pour $x \in \mathbb{R}$, si $f(\cdot,x) \in C^1(I,\mathbb{R}^3)$, on note
$$\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(\cdot,x), \frac{\partial f_2}{\partial t}(\cdot,x), \frac{\partial f_3}{\partial t}(\cdot,x)\right).$$
- Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Lorsque $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, $t \mapsto M(t) = (m_{ij}(t))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}}$, on dit que $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}))$ si et seulement si $m_{ij} \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,k\}^2$. Dans ce cas, on note $M'(t) = (m'_{ij}(t))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}}$.
- On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x+T) = f(x)$.
- I_3 désigne la matrice carrée identité de taille 3.
- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la matrice
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie (I).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est une solution de l'équation (E_α) si $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et

$$(E_\alpha) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + \frac{ix}{2} f'(x) + \frac{f(x)}{2} \left(\alpha |f(x)|^2 + 1\right) = 0.$$

Dans les questions 1 à 7 de la Partie (I) on suppose que $\alpha > 0$. De plus, on suppose qu'il existe une solution f de (E_α) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

1. On pose $f_1 = \Re e(f)$ et $f_2 = \Im m(f)$. Exprimer f_1'' et f_2'' en fonction de f_1', f_2', f_1 et f_2.

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)|^2 + \frac{1}{4\alpha} \left(\alpha |f(x)|^2 + 1\right)^2 = \frac{1}{4\alpha} (\alpha + 1)^2 .$$

3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq 1,$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (\alpha + 1) .$$

4. Le but de cette question est de démontrer qu'il existe $(\ell, M_0) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| |f(x)|^2 - \ell \right| \leq \frac{M_0}{x}.$$

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Im m(f'(x)\overline{f}(x)) + \frac{x}{4} |f(x)|^2 - \frac{1}{4} \int_0^x |f(t)|^2 \, dt = 0.$$

(b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 \, dt \right) = -\frac{4}{x^2} \Im m(f'(x)\overline{f}(x)).$$

(c) En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 \, dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

(d) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 \, dt - \ell \right| \leq \frac{M}{x}.$$

(e) Conclure.

5.

(a) On suppose dans cette question que $\ell = 1$. Montrer qu'il existe $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| |f(x)|^2 - 1 \right| \leq \frac{M_1}{x^{3/2}}.$$

(b) En déduire que $\ell < 1$.

6. Montrer que $|f|$ n'est pas périodique.

7. Pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose

$$f_\alpha(x) = f(x)\exp\left(i\frac{x^2}{4}\right), \quad \Psi_\alpha(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} f_\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

(a) Existe-t-il $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Psi_\alpha(t,\cdot)$ soit périodique ?

(b) Exprimer f_α', f_α'' et $|f_\alpha|$ en fonction de f, f', f'' et $|f|$.

(c) Justifier que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a $\Psi_\alpha(\cdot,x) \in C^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C})$ et $\Psi_\alpha(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, puis démontrer que Ψ_α vérifie l'équation (F_α) :

$$(F_\alpha) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad i\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial x^2}(t,x) + \frac{1}{2}\Psi_\alpha(t,x)\left(\alpha|\Psi_\alpha|^2(t,x) + \frac{1}{t}\right) = 0.$$

8. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à termes complexes telle que la série de terme général $k^2 a_k$ est absolument convergente. Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ on note alors

$$\Phi_0(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-ik^2t+ikx}.$$

(a) Montrer que Φ_0 est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, on a $\Phi_0(\cdot,x) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\Phi_0(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Calculer $\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t,x)$ et $\dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(t,x)$.

(c) Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à termes complexes telle que la série de terme général $k^2 c_k$ est absolument convergente. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Construire une fonction Ψ_0 définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui vérifie :

- Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\Psi_0(\cdot,x) \in C^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C})$ et $\Psi_0(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, et Ψ_0 est solution de l'équation (F_0) c'est-à-dire

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad i\frac{\partial \Psi_0}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2}(t,x) + \frac{1}{2t}\Psi_0(t,x) = 0;$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\Psi_0(t,\cdot)$ est périodique ;
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_0(1,x) = f_0(x)$.

Partie (II).

Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{M}$ la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -m & 0 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la matrice

$$F_n(t) = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \mathcal{M}^k}{k!} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Montrer que la suite $(F_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $F(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Exprimer $F(t)$ en fonction de $R(\theta)$, où θ dépend de m et t.

10. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et X et Y vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a $F(t)X \cdot Y = X \cdot F(-t)Y$. En déduire que $F(t)(X \wedge Y) = (F(t)X) \wedge (F(t)Y)$.

11. Montrer que $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $F'(t) = F(t)\mathcal{M}$.

12. Montrer que pour $X \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}X \cdot X = 0$. Interpréter géométriquement l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto (I_3 + \mathcal{M})X$.

13. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que la suite $((I_3 + \mathcal{M})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie (III).

On suppose que $G \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G''(x) = \frac{1}{2}\Big(\,(I_3 + \mathcal{M})\, G(x)\Big) \wedge G'(x),$$

et que de plus

$$\|G'(0)\| = 1, \quad \big(\,(I_3 + \mathcal{M})\, G(0)\big) \cdot G'(0) = 0.$$

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(x) = G'(x).$$

14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|T(x)\| = 1$.

15. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(I_3 + \mathcal{M})\, G(x) - xG'(x) = 2G'(x) \wedge G''(x)$.

16. Pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit $\widetilde{G}(t, x) = \sqrt{t}F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, où F est définie à la question 9. Montrer que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a $\widetilde{G}(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^3)$ et $\widetilde{G}(t, \cdot) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, puis établir que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial x}(t, x) \wedge \frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial x^2}(t, x).$$

On suppose dans toute la suite de cette partie que

$$m = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose de plus qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$G(0) = (0, 0, 2\lambda), \quad G'(0) = (1, 0, 0).$$

17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|G_1(x)| \le |x|$, où l'on note $G_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la première coordonnée de $G = (G_1, G_2, G_3)$.

18. Montrer que $G \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

19. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\|T'(x)\| = \lambda$.

20. Pour $x \in \mathbb{R}$, on introduit les vecteurs

$$n(x) = \frac{T'(x)}{\lambda}, \quad b(x) = T(x) \wedge n(x),$$

de sorte que $(T(x), n(x), b(x))$ forme une base orthonormale directe.

(a) En utilisant la question 15, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2b'(x) = -xn(x)$.

(b) En déduire que $n'(x) = -\lambda T(x) + \frac{x}{2} b(x)$.

(c) Montrer que G vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'''(x) + \left(\lambda^2 + \frac{x^2}{4}\right) G'(x) - \frac{x}{4} G(x) = 0.$$

21.
(a) Écrire l'équation différentielle linéaire $Y''' + \left(\lambda^2 + \frac{x^2}{4}\right) Y' - \frac{x}{4} Y = 0$, où $Y \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, sous la forme d'un système différentiel $X' = AX$, où $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et où $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On précisera n et A.

(b) Montrer que les coordonnées G_1, G_2 et G_3 de G vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(-x) = -G_1(x), \quad G_2(-x) = G_2(x), \quad G_3(-x) = G_3(x).$$

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|G(x)\|^2 = x^2 + 4\lambda^2$.

(d) Établir que si G_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ alors G est une application injective sur $\mathbb{R}$.

22.
(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |G_1'(x) - \cos(\lambda x)| \leq \frac{x^3}{6\lambda}.$$

Indication : On pourra admettre que pour $r \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie $y''(x) + \lambda^2 y(x) = r(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors

$$y(x) = \cos(\lambda x) y(0) + \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} y'(0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x r(s) \sin(\lambda(x-s))\, ds.$$

(b) En déduire qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que si $\lambda > \lambda_0$ alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que $G_1(x_0) = 0$.

23. Soit $H \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ telle que $\|H'(x)\| = 1$ et $H''(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $T_H(x) = H'(x)$, $n_H(x) = T_H'(x)/\|T_H'(x)\|$ et $b_H(x) = T_H(x) \wedge n_H(x)$. On admet qu'il existe $k_H(x)$ et $\tau_H(x)$ tels que

$$\begin{cases} T_H'(x) = k_H(x) n_H(x) \\ n_H'(x) = -k_H(x) T_H(x) + \tau_H(x) b_H(x) \\ b_H'(x) = -\tau_H(x) n_H(x). \end{cases}$$

Exprimer k_G et τ_G, puis montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction

$$\Psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} k_G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \exp\left(i \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} \tau_G\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) dy\right)$$

est solution de l'équation (F_α) définie à la question 7 (c), c'est-à-dire

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad i \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t,x) + \frac{1}{2} \Psi(t,x) \left(\alpha |\Psi|^2(t,x) + \frac{1}{t}\right) = 0.$$