Rapport de l'épreuve écrite de mathématiques
du concours d'admission 2020
Ecoles normales supérieures - Ecole Polytechnique
Filière PSI

I. Le sujet

L'épreuve écrite de mathématiques s'est déroulée dans le contexte exceptionnel de la pandémie de Covid-19.

L'énoncé comporte trois parties. Il porte essentiellement sur un type d'approximation de fonctions à plusieurs variables, sur la concavité, la semi-concavité et les notions de borne inférieure et de borne supérieure. De nombreuses autres notions y sont abordées. On peut en citer les suivantes :

- Dérivées partielles et gradient
- Fonctions de classe C^1, fonctions minorées
- Existence de bornes inférieures et supérieures
- Minimisation de fonctions quadratiques à plusieurs variables
- Fonctions lipschitziennes
- Convergence uniforme de suites de fonctions
- Inégalités sur les fonctions convaves
- Suites bornées et suites extraites
- Projection sur un convexe fermé

L'énoncé est clair et bien détaillé. Le niveau de difficulté des questions est assez variable. Les premières questions de l'énoncé sont abordables et ont permis à la quasi-totalité des candidats d'entamer progressivement le sujet. Par ailleurs, l'énoncé est long et peu de candidats ont pu aborder la troisième partie. On peut néanmoins affirmer que in fine le sujet a répondu très favorablement aux exigences de sélection et de classement en produisant un écart type raisonnable et en distinguant les rares copies exceptionnellement réussies. Rappelons que les épreuves orales d'admission aux Ecoles Normales Supérieures sont annulées en raison de la crise de la Covid-19.

II. Commentaires

La partie I a été souvent abordée en entier, mais avec beaucoup d'imprécisions sur le maniement des bornes inférieures et sur les inégalités avec valeur absolue. En particulier beaucoup de fautes ont été commises avec utilisation implicite du raisonnement faux : $x < y$ implique $|x| < |y|$.

Beaucoup de candidats passent trop rapidement au supremum (ou infimum) dans les inégalités, souvent sans justification. Le raisonnement avec un élément générique est peu maitrisé. Par ailleurs, de nombreux candidats pensent qu'une borne supérieure (ou inférieure) est toujours atteinte. Ces observations sont confirmées par des erreurs presque systématiques dans certaines questions (comme la question 4).

Dans la question 7, les hypothèses d'application du théorème sont dans beaucoup de copies soit absentes soit seulement citées sans justification.

Dans la question 11, les candidats ont tendance à passer outre la difficulté dans la preuve que (i) implique (ii).

Dans la Partie II, seul le début, avec les questions 12, 13 14 et 15, était régulièrement traité, plutôt bien dans l'ensemble. Peu de candidats ont réussi la question 15(a). Dans la question 15(e), on constate une confusion fréquente entre les fonctions lipschitziennes sur tout R^n et les fonctions lipschitziennes sur tout pavé.

La question 16 était souvent mal comprise. La question 17 était peu abordée, sauf le a). Dans la question 18, de nombreux candidats qui connaissaient a priori le résultat démontré (théorème de Bolzano-Weiertrass), utilisent ce dernier pour répondre à la question 18(c) (ignorant de facto que le but de la question 18 est de démontrer ce résultat).

Le jury est par ailleurs surpris que certaines questions faciles sont mal traitées. Beaucoup de candidats détaillent les questions triviales et sautent toutes les étapes importantes dans les questions plus dures, et concluent tout de même en affirmant qu'ils ont démontré le résultat (par exemple dans la question 1, justifiant en une page la concavité de $f+f_0$ puis affirmant "de même, on montre que $\min(f,f_0)$ est concave").

Peu de candidats ont abordé la partie III de l'énoncé.