

# Rapport sur l'épreuve orale de mathématiques

## Concours PSI - Session 2024

Rappelons tout d'abord la méthode d'interrogation : les candidats sont reçus dans la salle de préparation, 3 par 3 pour la première série, puis 5 par 5 dans les deux dernières séries. Ils préparent ensuite pendant 30 minutes un sujet qui leur a été distribué. Chacun des sujets est donné trois fois d'affilée de sorte que selon la semaine, chaque sujet est abordé 9 ou 15 fois, ce qui permet aux examinateurs, à chaque fin de demi-journée, de comparer les prestations et d'harmoniser leurs notes, tout en évitant d'éventuelles tricheries puisque des candidats ayant le même sujet ne peuvent pas se croiser pour se transmettre des indications. L'intérêt principal de cette méthode est de gommer autant que faire se peut, d'éventuelles disparités de difficulté entre les exercices. Signalons à ce propos qu'un candidat ayant terminé entièrement un exercice considéré comme facile, n'aura pas nécessairement une meilleure note qu'un autre n'ayant abordé que quelques questions d'un exercice plus ardu. En particulier les candidats jouant la montre pour n'aborder que les premières questions résolues pendant la préparation, sont sévèrement sanctionnés.

Dans la conception des sujets, les membres du jury privilégient les questions nécessitant une réflexion au détriment des exercices classiques de manipulations de formules ou de techniques du cours. Grossièrement les prestations de qualité obtenant une note supérieure ou égale à 15, sont celles où les candidats montrent une aptitude à analyser la question puis à mettre en œuvre leur dextérité technique pour la résoudre, étant entendu que chaque question pour être résolue ne demande qu'une analyse rapide et l'application d'une technique élémentaire du programme. Les prestations moyennes entre 9 et 14, correspondent à des candidats rapidement bloqués face à une question non classique mais étant capables d'appliquer leur cours quand l'analyse de la question est donnée par l'examineur. Les notes inférieures concernent des candidats peu à l'aise avec leur cours ou, rarement comme le reconnaît avec plaisir le jury, une méconnaissance profonde du programme.

Concernant les éléments d'appréciation, comme rappelé plus haut la maîtrise du programme est un critère qui sans être suffisant, est décisif dans l'appréciation du candidat ; le jury est par ailleurs très attentif à la réactivité du candidat face aux indications données. À ce propos le jury voudrait souligner les points suivants.

- Le jury est globalement satisfait de la maîtrise du cours et des notions portant sur les probabilités mais constate les difficultés d'analyse et de réflexion des candidats dans la mise en application notamment lorsque les probabilités sont utilisées dans un contexte d'algèbre linéaire, ou dans une question de combinatoire. Il apparaît par ailleurs regrettable que pour une variable aléatoire  $X_n$  prenant équitablement les valeurs  $\pm 1$ , les candidats ne pensent pas à faire le changement de variable  $Y_n = \frac{X_n+1}{2}$  pour se ramener au cas d'une variable de Bernoulli de façon à pouvoir appliquer directement le cours.
- De manière générale, malgré de bonnes capacités calculatoires les candidats ont souvent des difficultés à analyser ce qui doit être majoré ou minoré notamment quand il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée. Parmi les inégalités au programme, outre l'inégalité triangulaire, les candidats doivent aussi penser à tester si l'inégalité de Cauchy-Schwarz ne pourrait pas leur être utile pour résoudre la question posée.
- Des questions simples en début d'exercice, comme donner une CNS sur un polynôme  $P$  pour que  $|P(t)|^{-1/2}$  soit intégrable, peut déstabiliser des candidats révélant leur incapacité

à mobiliser leurs connaissances et à s'organiser. Une autre question de ce type était de trouver  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que toute fonction polynomiale est négligeable en  $+\infty$  par rapport à  $g$ . Parfois le jury peut poser en fin d'exercice des questions ouvertement difficiles dont on n'attend pas nécessairement une solution mais plutôt des idées et une analyse des essais infructueux : par exemple il a été demandé s'il pouvait exister une fonction  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que toute fonction  $f$  développable en série entière est négligeable par rapport à  $g$  en  $+\infty$ .

- L'algèbre linéaire posent toujours des soucis d'interprétation, rares sont les candidats capables, par exemple, de lire une matrice et donc de voir au delà d'un tableau de chiffres. Ils manquent souvent d'exemples classiques de matrices, comme les diagonales, les nilpotentes ou les unipotentes. Le jury constate, depuis plusieurs années, que les candidats ne savent pas donner l'inverse de la matrice  $(I - N)$  lorsque  $N$  est une matrice nilpotente en utilisant la série entière tronquée  $I + N + \dots + N^{n-1}$ .

Parmi les questions plus ouvertes qui ont été posées, et qui ont pu déstabiliser les candidats, était de savoir, étant donné un endomorphisme  $f$  d'un espace vectoriel complexe, quelle condition ajouter à l'hypothèse  $f^2$  diagonalisable pour que  $f$  soit aussi diagonalisable.

- La maîtrise du calcul différentiel bien qu'imparfaite pose moins de problème depuis quelques années. Les candidats sont plus ou moins précisément, capables de donner une définition correcte de la notion de différentielle et de l'appliquer dans le cadre d'une fonction à valeur réelle avec la notion de gradient.
- Concernant l'intégration, pour l'essentiel les exercices portent en premier lieu sur leurs capacités à invoquer les théorèmes du cours, essentiellement la convergence dominée, pour justifier leurs calculs d'interversion limite/intégrale, continuité et dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale. Cette partie du programme est pour l'essentiel bien maîtrisée mais, en contre partie, les candidats ont les plus grandes difficultés à analyser les diverses raisons qui peuvent rendre une intégrale impropre convergente et donc à majorer efficacement.

Le jury est globalement satisfait du comportement combatif des candidats et de leur bonne maîtrise technique. Pour une grande majorité, ils parviennent à utiliser efficacement leur temps de préparation en abordant les questions faciles, en se familiarisant avec celles plus difficiles quitte à ne traiter qu'un cas simple, à faire un raisonnement en petite dimension, à prouver une récurrence pour des petits crans. Pour l'essentiel de la note finale de sa prestation, le candidat sera jugé sur sa capacité à interagir aux indications et suggestions de l'interrogateur et ce sera d'autant plus facile lorsqu'il se sera au préalable bien imprégné du sujet, même si à la sortie de sa préparation il peut craindre de ne pas avoir traité beaucoup de questions.

Le jury note depuis quelques années un resserrement des notes avec finalement peu d'excellents candidats mathématiciens et symétriquement presque aucun candidat ne maîtrisant pas le cours. Ainsi pour l'essentiel les notes sont concentrées entre 9 et 15 avec un écart type proche de 3.