Rapport sur le sujet de Maths 2024
XUSR filière PSI

Dans cet énoncé on s'intéresse aux fonctions de matrices, les fonctions considérées étant celles développables en séries entières. L'approche adoptée n'est pas basée sur la convergence de séries matricielles associées mais sur les polynômes de matrices et en particulier le polynôme minimal dont la définition est intégrée dans l'énoncé.

La première partie de l'énoncé n'était pas difficile mais demandait de comprendre ce qui était demandé avant de mobiliser ses connaissances sur les séries entières et les matrices.

La deuxième partie est dédiée à la définition de fonctions de matrices. Les premières questions introduisent la notion du polynôme minimal et quelques unes de ses propriétés. On définit ensuite la fonction de matrice en s'appuyant sur le polynôme d'interpolation d'Hermite aux valeurs propres jusqu'aux multiplicités de ces dernières en tant que racines du polynôme minimal. Des propriétés de bases sont ensuite démontrées.

La troisième partie porte sur les fonctions de matrices diagonalisables. Dans ce cas, il est montré que l'image d'une matrice par une fonction se calcule facilement et naturellement par diagonalisation.

Dans la quatrième et dernière partie, on s'intéresse au calcul effectif de fonctions de matrices pour trois types de matrices et dans deux cas particuliers de séries entières. Le premier exemple traite le cas d'une matrice nilpotente. Le second exemple concerne les matrices de rang 1. Dans le troisième exemple, on explicite les fonctions de la matrice associée à la transformation de Fourier discrète. On termine avec le cas de séries génératrices de variables aléatoires discrètes suivant une loi binomiale ou une loi géométrique, appliquées à une matrice quelconque.

Voici quelques observations du jury question par question :

(1) La condition $R_u = 0$ est souvent déduite mais la réciproque est en général mal rédigée. L'exemple demandé est souvent donné correctement.

(2) En utilisant la question précédente, on avait $R_u > 0$ dès que $M(u) \neq \emptyset$, il suffisait alors de considérer ϵI_n pour $0 < \epsilon < R_u$. La rédaction a souvent été très imprécise.

(3) Les deux implications $(i) \Longrightarrow (ii)$ et $(ii) \Longrightarrow (iii)$ sont évidentes. Quant à l'implication $(iii) \Longrightarrow (i)$, elle a été bien traitée dans la majorité des copies.

(4) Il s'agissait essentiellement de savoir qu'une matrice complexe ayant 0 comme unique valeur propre, est nilpotente, propriété connue par une large majorité des candidats.

(5) Cette question est une conséquence directe d'un résultat du cours en procédant par récurrence. Néanmoins, certains candidats utilisent malencontreusement la règle de d'Alembert.

(6) De nombreux candidats affirment que $R_{u+v} = \min(R_u, R_v)$.

(7) Cette question a été rarement abordée car, le jury s'en excuse, il manquait le mot "réelles" dans l'hypothèse sur les deux matrices. De rares candidats ont pris l'initiative de résoudre la question dans le cas où les deux matrices sont réelles symétriques en utilisant le Théorème spectral, d'autres ont avoués que pour des matrices complexes ils ne pouvaient rien faire : la question a été neutralisée.

(8) L'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton a été quasi systématique.

(9) et (10) Ces deux questions ont été plutôt bien traitées par de nombreux candidats.

(11) Un certain nombre de candidats a prouvé que les valeurs propres de A sont des racines de φ_A. En revanche, étonnamment, la réciproque n'a presque jamais été traitée.

(12) Le nombre de candidats ayant répondu à cette question correctement est très réduit en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire de φ_A. Il paraissait pourtant plus naturel d'utiliser l'unicité de φ_A en conjuguant $\varphi_A(A) = 0$.

(13) La question a été abordée par de nombreux candidats mais elle a été rarement bien résolue. Le jury a observé de nombreuses lacunes dans le décompte des racines avec leurs ordres de multiplicité et dans le raisonnement pour se restreindre à la démonstration de l'injectivité de l'endormorphisme.

(14) Cette question a été peu abordée. Il suffisait pour l'essentiel de partir de $P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i) = Q^{(k)}(\lambda_i)$ et de raisonner sur $P - Q$.

(15) Il s'agissait de voir que $\varphi_{\alpha I_n} = X - \alpha$ et d'utiliser la question précédente. Tous les candidats ou presque a cru répondre à la question mais très peu ont donné le bon argument.

(16) De nombreux candidats ont su détecter une question calculatoire à leur portée et ont donc répondu efficacement à cette question simple où il s'agissait d'utiliser que le polynôme minimal était $(X - \alpha)(X - \beta)$.

(17-a) Il s'agit de considérer un polynôme d'interpolation dans l'union des valeurs propres de A et de B. Peu de copies ont entamé cette question et seuls quelques candidats ont alors réussi à la résoudre.

(17-b) Quelques candidats ont su détecter qu'il suffisait d'utiliser la question précédente pour AB et BA.

(18) Il suffisait d'utiliser la question (14) et donc de vérifier le calcul : pour autant aucun candidat ne s'est lancé dans cette question de fin de partie, préférant certainement assurer des points dans les parties suivantes.

(19) Etonnement, cette question a été peu abordée et presque jamais correctement.

(20) Dans (a), quelques candidats ont pensé à évaluer le polynôme qui apparaît à droite en les λ_i fournissant ainsi une réponse correcte. Néanmoins, la question révèle que de nombreux candidats n'ont pas compris comment évaluer une fonction u en une matrice A donnée. Les deux questions (b) et (c) ont été très rarement traitées.

(21) La question n'est pas difficile ; il suffisait d'observer que deux matrices semblables ont le même polynôme minimal et que, si Q est un polynôme, $Q(BAB^{-1}) = BQ(A)B^{-1}$. Malgré cela, la question n'a pas été traitée par une large majorité des candidats.

(22) Dans la quasi-totalité des copies, la réponse à ces deux questions 22) a) et 22) b) est soit absente, soit fausse. Cela révèle à nouveau que cette notion de fonction de matrices développée dans la deuxième partie de l'énoncé n'a pas été bien comprise.

(23) Les très bonnes copies ont trouvé le polynôme minimal de cette matrice triangulaire nilpotente. Etonnamment, même peu de copies ont pensé au polynôme caractéristique et peu ont déterminé ce dernier correctement.

Seules les très bonnes copies ont entamé les questions restantes. Presque aucune copie n'a répondu correctement à la dernière question 26) b).

Le jury observe que l'énoncé n'était pas trop calculatoire. Il estime que cet énoncé a permis à presque tous les candidats de s'exprimer et cela selon leur niveau de préparation et de maitrise du programme. Les deux premières parties du sujet ont été très largement abordées. Les difficultés ont été progressives et la différence entre les copies s'est faite sur la compréhension des fonctions de matrices, sur les raisonnements et sur la maitrise du programme officiel, notamment concernant la réduction des matrices et les séries entières. Néanmoins, l'élément le plus discriminant a été la compréhension de la manière dont on évalue une fonction en une matrice à travers les polynômes et l'interpolation d'Hermite aux racines du polynôme minimal. Les copies ont parfois révélé de nombreuses lacunes concernant la manipulation des séries entières et les polynômes de matrices.

Le Jury a utilisé toute l'échelle des notes, allant de 0 à 20. La répartition des notes a été presque optimale, sans anomalies ni phénomènes de concentration ou de forte discontinuités : une belle gaussienne avec une moyenne de 10,14 et un écart type de 3,5.