

**ECOLE NORMALES SUPERIEURES
ECOLE POLYTECHNIQUE**

CONCOURS D'ADMISSION 2026

**MERCREDI 15 AVRIL 2026
08h00 - 12h00**

FILIERE PSI - Epreuve n° 4

PHYSIQUE (XSR)

Durée : 4 heures

***L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

Autour du monde ferroviaire

Dans ce problème, nous étudions différents phénomènes physiques intervenant dans l'exploitation ferroviaire, et plus précisément en matière de traction électrique. La partie I s'intéresse aux phénomènes physiques associés à l'alimentation électrique des trains par un fil de contact aérien appelé *caténaire*. De nombreux trains électriques utilisant des moteurs à courant continu, la partie II s'intéresse à plusieurs phénomènes physiques ayant lieu au sein de l'entrefer de ces machines ou de la carcasse de leur rotor, afin de discuter des limitations physiques qui déterminent l'épaisseur de l'entrefer. Enfin, la partie III est consacrée à l'étude des propriétés de conduction des jonctions de semi-conducteurs, sur lesquelles reposent la majorité des composants utiles de l'électronique de puissance (diodes, transistors,...). Ces composants sont essentiels à la conception des redresseurs, hacheurs et onduleurs qui jouent un rôle important dans les locomotives électriques actuelles.

- Les applications numériques seront effectuées avec la précision qu'un calcul à la main permet aisément, et (sauf mention contraire) sans excéder deux chiffres significatifs. Les ordres de grandeur seront donnés avec un seul chiffre significatif. Les données numériques ont été choisies pour rendre aisés les calculs.
- Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.
- Le sujet comporte 14 pages. Les différentes parties sont largement indépendantes.

Notations, formulaire et données numériques.

- Masse volumique du Cuivre : $\rho_{\text{Cu}} = 8,96 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Masse volumique du Fer : $\rho_{\text{Fe}} = 7,87 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Puissance utile typique d'un moteur à courant continu ferroviaire : $P_u \sim 1 \text{ MW}$
- Rayon typique d'un rotor de moteur à courant continu ferroviaire : $R \sim 1 \text{ m}$
- Longueur typique d'un rotor de moteur à courant continu ferroviaire : $L \sim 1 \text{ m}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Viscosité dynamique de l'air à $T = 298 \text{ K}$: $\eta = 1,7 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Conductivité thermique du Fer : $\lambda_{\text{Fe}} = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Coefficient de convection thermique rotor/entrefer (avec rotor en rotation) : $h = 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- Coefficient de dilatation thermique isobare du Fer : $\beta = 3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Charge électrique élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Nombre d'atomes typique par unité de volume dans un cristal : 10^{29} m^{-3}
- Quelques données numériques : $\ln(2 \times 10^9) \simeq 21$, $\exp(20) \simeq 5 \times 10^8$ et $\exp(1/0,03) \simeq 3 \times 10^{14}$
- Gradient d'un champ scalaire $f(r, \theta, z)$ exprimé en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

- Laplacien d'un champ vectoriel de la forme $\vec{A} = A(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques :

$$\Delta \vec{A} = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{e}_r + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} \right) \vec{e}_\theta.$$

I Quelques phénomènes physiques liés aux caténaires

Le terme « caténaire » désigne l'ensemble du système de câbles suspendus au-dessus des voies afin d'assurer l'alimentation des trains électriques. Ces derniers disposent quant à eux d'un pantographe, qui est un bras articulé situé sur leur toiture. Le pantographe peut être replié à l'horizontale lorsque le train est au repos, ou déployé jusqu'à venir au contact de la caténaire lorsque le train fonctionne, permettant ainsi le passage du courant de la caténaire jusqu'aux machines électriques du train. Le système de câbles formant la caténaire peut être assez complexe, se composant en particulier d'un ou plusieurs fils de contact (nommés ainsi car étant en contact avec les pantographes des trains), de fils porteurs, de câbles de renfort électrique pour les hautes intensités, et de poteaux régulièrement disposés le long des voies afin de porter cet ensemble de câbles.

Pour simplifier, nous allons ici considérer le cas d'un unique fil de contact, constitué de cuivre et de section circulaire de rayon R_c . Ce fil est suspendu à des poteaux régulièrement espacés et supposés alignés (ce qui est le cas en ligne droite), la distance entre deux poteaux successifs étant notée L_c . On a $L_c \gg R_c$. Nous allons donc modéliser cet unique fil de contact comme un fil infiniment fin de masse linéique μ , tendu rectilignement. On note (Ox) l'axe du fil, horizontal, et (Oy) l'axe vertical ascendant. On s'intéresse à de petits déplacements verticaux du fil. Ainsi, en toute abscisse x et à tout instant t , $y(x,t)$ désigne le déplacement vertical d'un point M du fil par rapport à sa position au repos. De plus, pour toute abscisse x et à tout instant t , on note $\vec{e}_t(x,t)$ le vecteur unitaire localement tangent au fil, au point M , et $\alpha(x,t)$ l'angle algébrique que $\vec{e}_t(x,t)$ forme avec $\vec{e}_x$. Enfin, on note $T(x)$ la tension du fil en l'abscisse x . Le fil est supposé ne subir ni déplacement horizontal, ni extension horizontale.

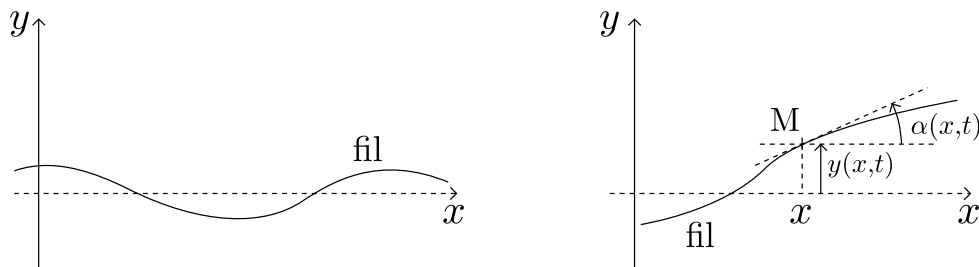


FIGURE 1 – **Schéma et paramétrage d'une caténaire.** À gauche : allure du fil en mouvement vertical, à un instant t donné. L'axe (Ox) représenté en ligne tiretée correspond au cas du fil au repos, tandis que l'axe (Oy) est vertical. À droite : agrandissement d'une portion de fil au voisinage d'un point M d'abscisse x , permettant d'illustrer les définitions de $y(x,t)$ et $\alpha(x,t)$.

1. Exprimer la masse linéique μ du fil de cuivre modélisant la caténaire en fonction de ρ_{Cu} et R_c .

On considère désormais un tronçon élémentaire de fil de longueur $d\ell$, correspondant à la partie du fil située entre les abscisses x et $x + dx$. La longueur au repos de ce tronçon est donc dx .

2. Sous l'effet du déplacement vertical du fil, ce petit tronçon peut se retrouver légèrement étiré. Exprimer sa nouvelle longueur $d\ell(x,t)$ en fonction de dx et de $\alpha(x,t)$. Dans le cas d'un fil très peu extensible, en déduire que l'on aura $|\alpha(x,t)| \ll 1$ en tout point du fil et à tout instant.
3. En négligeant l'influence de la pesanteur, et en se limitant au premier ordre non nul en $\alpha(x,t)$, montrer que la tension du fil est uniforme. Dans la suite, on notera donc la tension du fil T .
4. Toujours en négligeant l'influence de la pesanteur et en se limitant au premier ordre non nul en $\alpha(x,t)$, établir l'équation de D'ALEMBERT suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t),$$

et en déduire l'expression de la célérité c des ondes mécaniques transverses dans le fil, en fonction de T et μ .

Dans le cas d'un fil de contact de caténaire, c'est le frottement entre le pantographe et le fil qui génère des ondes mécaniques dans le fil. Si la vitesse v du train atteint la célérité c des ondes, on observe un phénomène analogue au franchissement du mur du son : l'amplitude des déplacements verticaux de la caténaire devient très importante au niveau du pantographe, ce qui endommage à la fois la caténaire et le pantographe, et peut mener à la rupture de la caténaire.

5. Pour un TGV en exploitation commerciale classique, la vitesse caractéristique du train est $v = 300 \text{ km.h}^{-1}$. En estimant une valeur plausible de R_c , donner la tension minimale $T_{\min}$ à appliquer à la caténaire d'une ligne à grande vitesse (LGV) pour éviter toute détérioration due aux ondes mécaniques générées par les pantographes des TGV.
6. Les caténaires des tramways urbains sont également faites en cuivre, mais sont bien moins tendues que celles des LGV. Proposer deux raisons physiques, liées aux valeurs de paramètres physiques pertinents, pour expliquer la plus faible tension des caténaires de tramway.
7. Nous avons ici supposé que le fil d'alimentation était rectiligne lorsque la voie ferrée est en ligne droite. En réalité, si on observe ce fil depuis le ciel dans les lignes droites, on constate qu'il décrit une ligne brisée évoluant autour de la droite médiane entre les deux rails. Expliquer le choix de cette géométrie pour le fil d'alimentation.

II Dimensionnement de l'entrefer d'une machine à courant continu

La machine à courant continu a été et est toujours très utilisée dans le domaine ferroviaire. Au vu de la puissance typique développée par les machines à courant continu ferroviaires, le champ magnétique statorique est créé par des bobinages alimentés en courant continu. Le stator et le rotor comportent bien entendu des carcasses ferromagnétiques dont le but est de maximiser l'intensité du champ magnétique statorique au niveau des câblages du rotor. Au vu de la forme cylindrique du rotor, la carcasse ferromagnétique du stator épouse cette forme, comme sur le schéma ci-dessous.

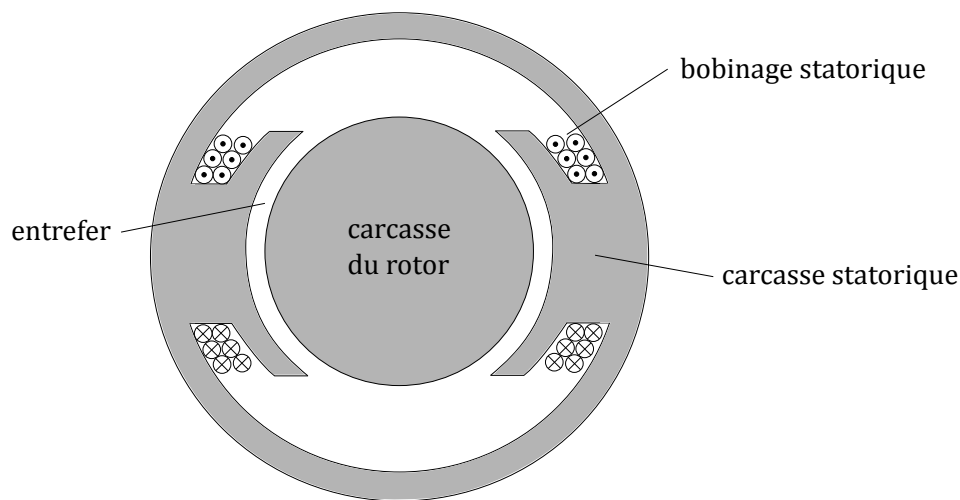


FIGURE 2 – Représentation simplifiée de la structure d'une machine à courant continu, en coupe selon un plan perpendiculaire à son axe de rotation. Le bobinage est enroulé autour de la carcasse statorique : les lignes de courant sortant du plan de la figure sont bouclées sur celles entrant dans ce plan.

II.A Champ magnétique dans l'entrefer

Nous considérons en première approximation que les courants électriques parcourant le bobinage statorique créent un champ magnétique statique dont les lignes sont quasi parallèles dans la carcasse

ferromagnétique du stator. Nous nous intéressons au devenir de ces lignes de champ dans l'entrefer. À l'interface entre la carcasse ferromagnétique du stator d'une part, et l'air emplissant l'entrefer d'autre part, se produit un phénomène de réfraction des lignes de champ magnétique, que nous allons préciser.

Pour ce faire, nous considérons une interface entre deux milieux, respectivement notés (1) et (2). En un point M de cette interface, on note $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire normal à l'interface en M , dirigé du milieu (1) vers le milieu (2). On désignera par M_1 et M_2 deux points alignés avec M selon l'axe dirigé par $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ et tels que M_1 (respectivement M_2) est infiniment proche de M mais appartenant strictement au milieu (1) (respectivement (2)).

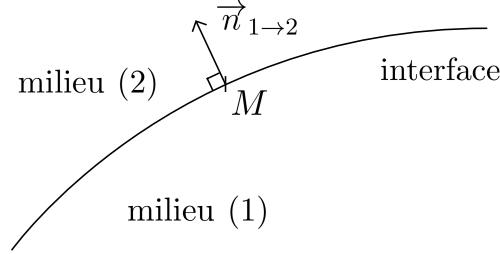


FIGURE 3 – **Interface entre deux milieux notés (1) et (2).** On a représenté le vecteur $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ en un point M de l'interface.

Pour tout vecteur $\vec{U}$, on définit ses composantes normale $\vec{U}_N$ et tangentielle $\vec{U}_T$ à l'interface en M par

$$\vec{U}_N = \left(\vec{U} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \right) \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{U}_T = \vec{U} - \vec{U}_N.$$

On admettra que les équations de MAXWELL impliquent les relations de passage suivantes :

$$\vec{B}_N(M_2) = \vec{B}_N(M_1) \quad \text{et} \quad \vec{H}_T(M_2) = \vec{H}_T(M_1). \quad (1)$$

8. Préciser ce qui différencie un matériau ferromagnétique dur et un matériau ferromagnétique doux. La justification s'appuiera sur un tracé de l'allure des cycles d'hystérésis en aimantation pour les deux types de matériau. En déduire quel type de matériau ferromagnétique (dur ou doux) on doit privilégier ici pour construire la carcasse du stator, et justifier le choix du matériau.

Dans toute la suite, le milieu (1) désigne l'air de l'entrefer, dont on négligera toute propriété magnétique. Quant au milieu (2), il désigne le matériau ferromagnétique constituant la carcasse du stator. Pour ce dernier, on effectuera l'approximation d'une aimantation linéaire en l'excitation magnétique, et on notera μ_r la perméabilité magnétique relative du matériau (2).

9. À l'aide de l'Éq. 1, en déduire une relation entre $\vec{B}_T(M_2)$, $\vec{B}_T(M_1)$ et μ_r .
10. On note α_1 (respectivement α_2) l'angle entre les vecteurs $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{B}(M_1)$ (resp. $\vec{B}(M_2)$). Montrer que l'on a

$$\tan(\alpha_1) = \frac{\tan(\alpha_2)}{\mu_r}.$$

11. Donner un ordre de grandeur de μ_r . Sachant que $\tan(2^\circ) \simeq 0,035$ et $\tan(88^\circ) \simeq 29$, tracer l'allure de α_1 en fonction de α_2 , pour α_2 variant de 0° à 90° . En déduire qu'en tout point de l'interface entre l'air et le milieu ferromagnétique considéré, on peut considérer que l'on est dans un des deux cas limites suivants :

- ★ la ligne de champ magnétique présente un angle $\alpha_1 > 0^\circ$ du côté de l'air et $\alpha_2 \simeq 90^\circ$ du côté du milieu ferromagnétique ;

- ★ la ligne de champ magnétique présente un angle $\alpha_2 < 90^\circ$ du côté du milieu ferromagnétique et $\alpha_1 \simeq 0^\circ$ du côté de l'air.

12. Dans le cas du stator étudié ici, dont le schéma est donné plus haut, dans lequel de ces deux cas limites tombe l'interface entre la carcasse statorique et l'entrefer ? Décrire et schématiser une situation qui tomberait dans l'autre cas limite.

Dans la suite, nous admettrons que les lignes de champ magnétique sont radiales dans l'entrefer d'une machine à courant continu. D'un point de vue énergétique, en l'absence de courant dans le bobinage du rotor, le circuit magnétique est donc très bien approximé par celui schématisé ci-dessous, dans lequel on supposera qu'aucune ligne de champ ne peut sortir des faces latérales du matériau ferromagnétique.

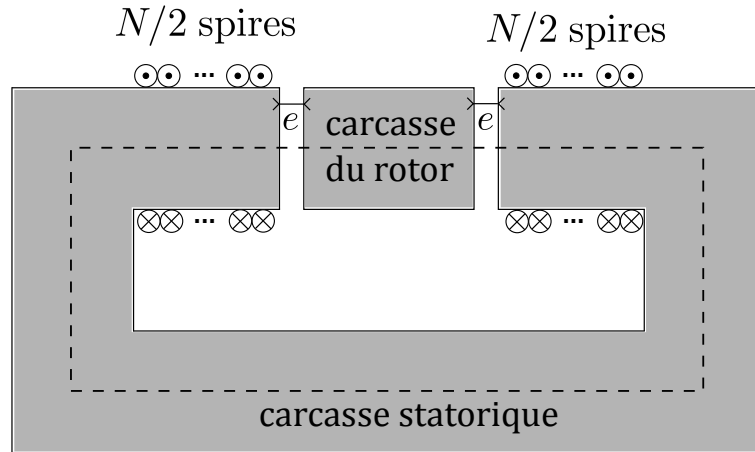


FIGURE 4 – Modélisation du circuit magnétique équivalent à la machine à courant continu, en l'absence de courant au rotor. Une ligne moyenne de champ magnétique est représentée en tireté.

Ce dernier est toujours supposé linéaire et sa perméabilité relative notée μ_r . On admet qu'en tout point de l'espace M , la densité volumique d'énergie magnétique s'exprime :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}}(M) = \frac{1}{2} \vec{H}(M) \cdot \vec{B}(M).$$

Enfin, on notera N le nombre total de spires du bobinage statorique et I l'intensité du courant parcourant ce bobinage. De plus, on note ℓ la longueur moyenne d'une ligne de champ magnétique au sein du matériau ferromagnétique, et e l'épaisseur de l'entrefer.

- Compte tenu des hypothèses effectuées, montrer que la norme de $\vec{B}$ est uniforme dans le matériau ferromagnétique. On la notera simplement B par la suite et on supposera que sa valeur est la même dans l'entrefer.
- Dans l'entrefer, exprimer la norme de $\vec{H}$, que l'on notera H_{air} , en fonction de B . De même, dans le matériau ferromagnétique, exprimer la norme de $\vec{H}$, que l'on notera H_{fer} , en fonction de B . En déduire les expressions de $\mathcal{E}_{\text{mag, air}}$ et $\mathcal{E}_{\text{mag, fer}}$, les densités volumiques d'énergie magnétique respectivement dans l'entrefer et dans le matériau ferromagnétique, en fonction de B , μ_0 et μ_r .
- En raisonnant sur la ligne de champ moyenne représentée en ligne tiretée sur la Fig. 4, montrer que :

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2e}.$$

16. Expliquer pourquoi, dans les machines tournantes, on cherche systématiquement à minimiser l'épaisseur de l'entrefer.

Il existe néanmoins plusieurs limitations physiques à la minimisation de l'épaisseur de l'entrefer d'une machine tournante, dont la dilatation thermique du rotor et le cisaillement de la couche d'air contenue dans l'entrefer. Dans la suite, nous allons modéliser ces deux phénomènes afin d'identifier lequel est le plus limitant en pratique.

II.B Cisaillement de l'air contenu dans l'entrefer

Nous étudions l'écoulement de l'air au sein de l'entrefer, dans le référentiel du stator. Le rotor est ici assimilé à un cylindre plein de hauteur L et de rayon R , en rotation à vitesse angulaire ω constante autour de son axe de symétrie. La carcasse statorique est quant à elle assimilée à un cylindre creux de rayon intérieur $R + e$, e étant l'épaisseur de l'entrefer. Nous adopterons dans la suite le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec l'axe de symétrie du rotor.

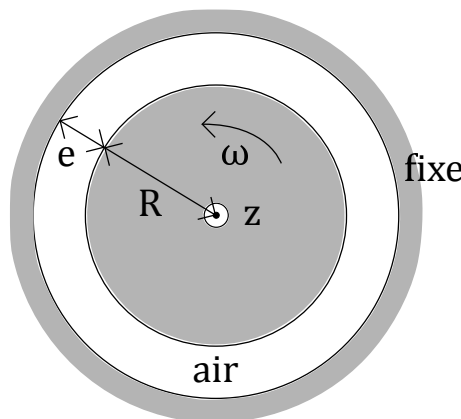


FIGURE 5 – Schéma de la couche d'air considérée, entre le rotor de rayon R et la carcasse statorique de rayon intérieur $R + e$.

17. Rappeler la définition de l'échelle mésoscopique et présenter brièvement son intérêt, ainsi que la notion de particule de fluide. En raisonnant sur une particule de fluide mésoscopique de forme cubique, établir l'expression suivante de la résultante volumique des forces de pression dans un fluide

$$\vec{f}_{\text{pr}} = -\overrightarrow{\text{grad}} P,$$

où P désigne le champ de pression.

Nous admettrons par ailleurs que la résultante volumique des forces de viscosité dans un fluide a pour expression

$$\vec{f}_{\text{visc}} = \eta \Delta \vec{u},$$

où η désigne la viscosité dynamique du fluide, Δ l'opérateur laplacien vectoriel et $\vec{u}$ le champ de vitesse.

18. En négligeant l'effet du champ de pesanteur, montrer que l'équation du mouvement d'une particule de fluide d'air contenu dans l'entrefer est :

$$\rho_{\text{air}} \frac{d\vec{u}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{u},$$

où ρ_{air} désigne la masse volumique de l'air, supposée uniforme.

19. En régime permanent de rotation du rotor, justifier que si $L \gg R$, alors on peut supposer que la pression ne dépend que de r et que le champ de vitesse est de la forme $\vec{u} = u(r)\vec{e}_\theta$. En supposant cette condition vérifiée, établir les deux équations suivantes sur le champ de vitesse :

$$\rho_{\text{air}} \frac{u(r)^2}{r} = \frac{dP}{dr} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 u}{dr^2}(r) + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}(r) - \frac{u(r)}{r^2} = 0. \quad (2)$$

20. En recherchant les solutions de la forme $u(r) = k r^n$ avec k une constante et n un nombre entier, montrer que

$$u(r) = ar + \frac{b}{r},$$

où a et b sont des constantes que l'on explicitera en fonction de R , e et ω . En déduire la représentation graphique du champ de vitesse u en fonction de r sur l'intervalle $[R, R+e]$.

On admet que la force surfacique (contrainte) de cisaillement, notée $\frac{d\vec{F}_{\text{visc}}}{dS}$, exercée par le fluide situé à l'intérieur d'un cylindre de rayon r sur le fluide situé à l'extérieur de ce cylindre a pour expression locale :

$$\frac{d\vec{F}_{\text{visc}}}{dS} = -\eta r \frac{d}{dr} \left(\frac{u(r)}{r} \right) \vec{e}_\theta.$$

21. En appliquant le théorème du moment cinétique à un volume de fluide contenu entre les rayons r et $r+dr$, retrouver l'équation différentielle obtenue pour $u(r)$ dans l'Éq. (2).
 22. Montrer alors que le couple $\vec{\Gamma}_{\text{rotor/air}}$ exercé par le rotor sur l'air situé dans l'entrefer a pour expression

$$\vec{\Gamma}_{\text{rotor/air}} = A\eta L b \vec{e}_z,$$

où A est un préfacteur à déterminer.

23. En déduire l'expression de la puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{rotor/air}}$ cédée par le rotor à l'air de l'entrefer, en fonction de η , L , R , e et ω . En estimant une valeur plausible de ω et de e , évaluer $\mathcal{P}_{\text{rotor/air}}$ dans le cas d'un moteur à courant continu utilisé dans une locomotive. Préciser ce qu'il advient de l'énergie correspondante.

II.C Dilatation thermique du rotor

Lorsque le moteur à courant continu fonctionne, la carcasse ferromagnétique du rotor subit une élévation de température qui mène à une augmentation de son volume. Il faut donc que l'entrefer soit suffisamment large pour permettre la dilatation thermique du rotor. L'objectif de cette sous-partie est d'évaluer un ordre de grandeur de l'augmentation du rayon du rotor due à l'échauffement, dans le cas d'un moteur à courant continu de locomotive. Pour ce faire, le rotor sera assimilé à un cylindre plein homogène en fer, de hauteur L supposée indépendante de la température, mais dont le rayon R dépend de la température T . À température $T_0 = 298$ K, on notera R_0 le rayon du rotor. Tout comme dans la sous-partie précédente, nous adopterons dans la suite le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec l'axe de symétrie du rotor.

24. Dans le cas d'une machine à courant continu, proposer deux phénomènes physiques, internes à la carcasse ferromagnétique du rotor, susceptibles d'entraîner son échauffement. Ces phénomènes constituant une source de production de puissance thermique au sein du rotor, justifier que la puissance thermique volumique associée, notée p_{th} , dépend de la vitesse angulaire de rotation ω du rotor, et qu'elle peut être considérée comme uniforme sur tout le volume du rotor. On se placera sous ces hypothèses simplificatrices dans toute la suite.

Dans la suite de l'étude, on s'intéresse à l'expression du profil de température au sein du rotor, tournant à vitesse angulaire constante ω , dans le cas du régime permanent établi. Au regard de la géométrie du problème, le champ de température est supposé de la forme $T(r)$. On suppose également la loi de FOURIER vérifiée au sein du rotor.

25. À l'aide d'un bilan d'énergie à préciser, montrer que, sous ces hypothèses, on a

$$\frac{d}{dr} (r j_{\text{th}}(r)) = r p_{\text{th}},$$

où $j_{\text{th}}(r) = \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{e}_r$, avec $\vec{j}_{\text{th}}$ (en W.m^{-2}) le vecteur densité de flux thermique au sein du rotor.

26. En déduire l'évolution en fonction de r de j_{th} et T , donnée par

$$j_{\text{th}}(r) = \frac{p_{\text{th}}}{2} r \quad \text{et} \quad T(r) = -\frac{p_{\text{th}}}{4\lambda_{\text{Fe}}} r^2 + C, \quad (3)$$

où λ_{Fe} est la conductivité thermique du fer, et C une constante réelle.

On suppose qu'à l'interface entre le rotor et l'air de l'entrefer, le flux thermique conducto-convectif surfacique, noté φ et compté positivement du rotor vers l'air de l'entrefer, suit la loi de NEWTON

$$\varphi = h(T(R) - T_{\text{air}}),$$

où h est le coefficient de convection thermique et T_{air} la température de l'air de l'entrefer, supposée uniforme sur celui-ci.

27. Établir l'expression de la constante C , introduite dans l'Éq. (3).

Maintenant que l'on a établi le profil de température au sein du rotor en rotation, nous allons pouvoir estimer son effet sur le volume du rotor. On note m la masse totale du rotor, ρ_0 la masse volumique du fer à la température $T_0 = 298 \text{ K}$ et $\rho(r)$ sa masse volumique à la température $T(r)$. Enfin, on définit le coefficient de dilatation thermique isobare du fer, noté β et supposé indépendant de T sur la plage de température explorée ici, et défini par :

$$\beta = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P.$$

28. On considère une masse de fer occupant un volume V_i à la température T_i et que l'on porte à la température T_f de façon isobare. Établir l'expression de son nouveau volume V_f en fonction de V_i , β , et $T_f - T_i$. En déduire l'expression de $\rho(r)$ en fonction de ρ_0 , β , $T(r)$ et T_0 .

29. Exprimer alors la masse totale m du rotor sous forme intégrale et en déduire l'expression suivante

$$\frac{\beta p_{\text{th}}}{4\lambda_{\text{Fe}}} R_0^2 \exp(\beta(C - T_0)) = \exp\left(\frac{\beta p_{\text{th}}}{4\lambda_{\text{Fe}}} R^2\right) - 1. \quad (4)$$

30. En considérant que $p_{\text{th}} \sim 10 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}$, et à partir de l'Éq. (4), montrer que le rayon du rotor R se met sous la forme suivante

$$R = R_0 \exp\left(\frac{\beta}{2}(C - T_0)\right),$$

avec R_0 le rayon du rotor lorsqu'il est uniformément à la température T_0 .

31. En déduire un ordre de grandeur de l'augmentation relative du rayon du rotor $\frac{R - R_0}{R_0}$, due à son échauffement.

III Étude des jonctions de semi-conducteurs

La traction ferroviaire a tiré un important profit du développement de l'électronique de puissance. En effet, c'est l'apparition des diodes de puissance et des transistors de puissance qui a permis de concevoir les redresseurs et hacheurs utilisés pour contrôler l'alimentation des moteurs à courant continu, ainsi que les onduleurs utilisés pour alimenter les machines synchrones et asynchrones. Ces composants utilisent des matériaux semi-conducteurs, dans le cadre de « jonctions PN », que nous nous proposons d'étudier ici.

III.A Semi-conducteurs

Un bon cadre théorique pour la description des propriétés de conduction électrique des matériaux semi-conducteurs est celui de la théorie des bandes. Dans cette approche, on considère que les électrons des différents atomes du matériau peuplent différentes « bandes » en fonction de leurs niveaux d'énergie. On appelle « bande de valence » l'ensemble des niveaux d'énergie peuplés par les électrons de valence des différents atomes, en l'absence d'agitation thermique. Par ailleurs, on appelle « bande de conduction » l'ensemble des niveaux d'énergie permettant aux électrons de se déplacer au sein du matériau, et donc de participer à la conduction électrique. Dans le cas d'un matériau semi-conducteur, cette bande est distincte de la bande de valence : on a $E_C > E_V$, en notant E_V le plus haut niveau d'énergie de la bande de valence et E_C le plus bas niveau d'énergie de la bande de conduction.

Ainsi, on définit « l'énergie de gap » E_g d'un matériau semi-conducteur comme l'écart énergétique entre le plus haut niveau de la bande de valence et le plus bas niveau de la bande de conduction :

$$E_g = E_C - E_V. \quad (5)$$

L'agitation thermique des électrons de valence permet à une faible partie d'entre eux d'atteindre la bande de conduction, et donc de pouvoir participer à la conduction électrique. Chaque électron passé dans la bande de conduction laisse derrière lui une place vacante dans la bande de valence, que l'on appellera « trou ». L'apparition de ces trous permet donc aux électrons restés dans la bande de valence de se déplacer. En effet, tout électron situé dans un atome voisin d'un atome présentant un trou peut aller combler le trou en question. Il laisse à son tour derrière lui un trou, et de proche en proche, il peut en résulter un courant électrique, que l'on associera simplement au déplacement du « trou ». Chaque « trou » sera donc considéré comme une particule de charge $+e > 0$ ($-e$ étant la charge d'un électron) et pouvant participer à la conduction électrique.

On s'intéresse dans la suite au cas du silicium (Si) pur, matériau semi-conducteur très utilisé en électronique de puissance. On notera n le nombre d'électrons atteignant la bande de conduction par unité de volume du matériau, et p le nombre de trous dans la bande de valence par unité de volume du matériau.

Il est possible de « doper » un matériau semi-conducteur en remplaçant une partie de ses atomes par des atomes d'un autre élément chimique, possédant un nombre d'électrons de valence différent. Chaque atome de silicium possède 4 électrons de valence, il est donc possible de doper le silicium de deux façons.

- Dopage N : on remplace certains atomes de silicium par des atomes pentavalents, c'est-à-dire possédant 5 électrons de valence (comme le phosphore P). Pour chacun, ce 5^{ème} électron de valence passe directement dans la bande de conduction du matériau, augmentant ainsi n .
- Dopage P : on remplace certains atomes de silicium par des atomes trivalents, c'est-à-dire ne possédant que 3 électrons de valence (comme le bore B), chacun entraînant directement l'apparition d'un trou supplémentaire dans la bande de valence du matériau, augmentant ainsi p .

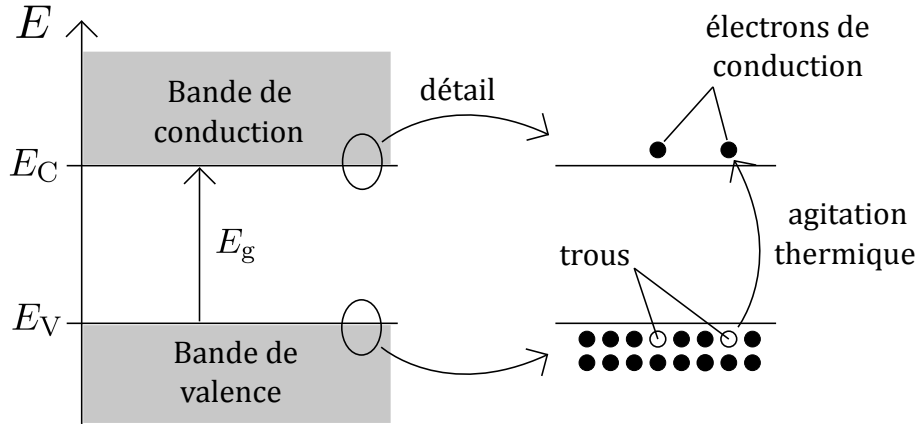


FIGURE 6 – Niveaux d'énergie occupés par les électrons dans un semi-conducteur. Sur la droite, on détaille la situation des électrons figurés par des disques noirs. Certains électrons atteignent la bande de conduction grâce à l'agitation thermique, et laissent derrière eux un trou dans la bande de valence.

Si le matériau n'est pas dopé, il est dit « intrinsèque ».

Dans toute la suite, les grandeurs n et p seront accompagnées d'un indice i si elles se rapportent au silicium intrinsèque, N si elles se rapportent au silicium dopé N, et P si elles se rapportent au silicium dopé P. Ces deux grandeurs dépendent par ailleurs de la température, et on donne, pour le silicium, $n_i = 2 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$ à 298 K.

On admet enfin que le dopage ne modifie pas la valeur du produit $n(T) \times p(T)$.

- 32.** Dans le cas du silicium dopé N, on note n_D le nombre d'atomes de silicium par unité de volume remplacés par des atomes pentavalents. Pour un dopage faible, on remplace 1 atome de silicium sur 100 millions, et pour un dopage fort, on en remplace 1 sur 100 000. Justifier alors que pour le silicium dopé N,

$$n_N \simeq n_D \quad \text{et} \quad p_N \simeq \frac{n_i^2}{n_D}. \quad (6)$$

- 33.** En déduire une estimation des intervalles auxquels appartiennent respectivement n_N et p_N pour le silicium à 25 °C, entre un dopage faible et un dopage fort.

Dans le cas du silicium dopé P, on note n_A le nombre d'atomes de silicium par unité de volume remplacés par des atomes trivalents. Les proportions d'atomes remplacés sont les mêmes que pour un dopage N. Le raisonnement étant symétrique, on admettra que dans le silicium dopé P,

$$n_P \simeq \frac{n_i^2}{n_A} \quad \text{et} \quad p_P \simeq n_A. \quad (7)$$

III.B Jonction PN

On constitue une jonction PN en mettant en contact un semi-conducteur dopé P et un semi-conducteur dopé N. Dans toute la suite, nous supposons qu'il s'agit de silicium faiblement dopé dans les deux cas, avec $n_A = n_D$. On supposera que les deux matériaux ont une forme de pavé, on notera S l'aire de l'interface entre eux, et (Ox) l'axe normal à cet interface. L'origine O est prise sur l'interface et l'axe (Ox) est orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ dirigé du silicium dopé P vers le silicium dopé N. On supposera que la section S de la jonction est assez grande pour que le problème soit unidimensionnel. Ainsi, toutes les grandeurs physiques utiles ne dépendent que de la seule coordonnée cartésienne x .

34. Dans la mesure où $n_P \neq n_N$ et $p_P \neq p_N$, la mise en contact du silicium dopé N avec le silicium dopé P donne lieu à un phénomène de diffusion des électrons de conduction et des trous. Indiquer si le courant électrique diffusif qui en résulte est orienté selon $+\vec{e}_x$ ou $-\vec{e}_x$.
35. Initialement, les semi-conducteurs dopés N et P sont neutres. Justifier que sous l'effet de cette diffusion, ils acquièrent une densité volumique de charge ρ_e non nulle au voisinage de l'interface. Préciser le signe de ρ_e dans chacun des deux matériaux.
36. Indiquer la direction et le sens du champ électrique $\vec{E}$ créés par cette distribution de charges. En déduire le sens du courant électrique conductif qui en résulte.

Dans toute la suite, on admet que pour une jonction PN à l'équilibre, la diffusion des porteurs de charge a pour effet de décaler les niveaux d'énergie E_C et E_V au sein du silicium dopé N par rapport à ces mêmes niveaux au sein du silicium dopé P. Il s'en suit le profil énergétique représenté sur la Fig. 7 pour les électrons au sein de la jonction PN (on ne s'intéresse ici qu'aux électrons).

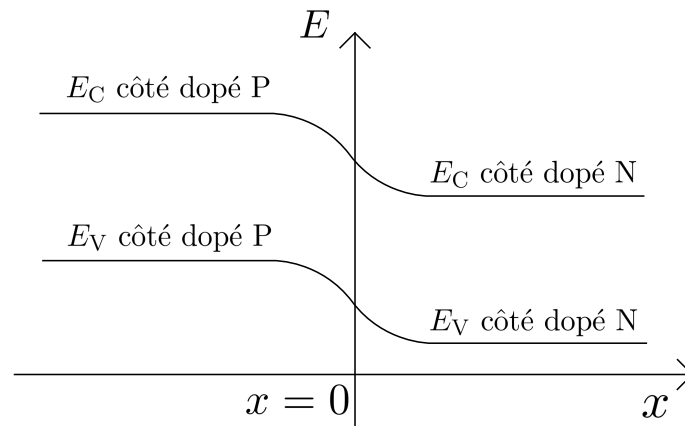


FIGURE 7 – Allure des niveaux d'énergie des électrons au voisinage de la jonction PN.

37. En déduire l'allure du tracé des fonctions suivantes : le potentiel électrostatique $V(x)$, la composante $E_x(x) = \vec{E}(x) \cdot \vec{e}_x$ du champ électrique, et enfin la densité volumique de charge locale du matériau $\rho_e(x)$.
38. La différence de potentiel électrostatique U_0 résultant entre le semi-conducteur dopé N et le semi-conducteur dopé P est donnée par :

$$U_0 = \frac{k_B T}{e} \ln \left(\frac{n_D n_A}{n_i^2} \right). \quad (8)$$

Estimer l'ordre de grandeur de U_0 et commenter.

III.C Relation courant-tension de la jonction PN

On appelle zone de charge d'espace (ZCE) la région sur laquelle $V(x)$ varie, qui correspond à celle sur laquelle ρ_e prend des valeurs non nulles. Nous effectuerons dans la suite l'approximation d'une ZCE « abrupte », c'est-à-dire que la fonction $\rho_e(x)$ sera supposée avoir l'allure représentée sur la Fig. 8. Compte tenu du fait que $n_A = n_D$, la neutralité globale de la jonction impose que la ZCE s'étend de façon symétrique par rapport au plan $x = 0$. En notant L_{ZCE} la largeur de la ZCE, on a donc que la ZCE correspond aux positions $x \in [-a, a]$ avec $a = L_{ZCE}/2 > 0$.

Nous allons chercher à calculer le courant électrique I traversant la jonction PN vers les x croissants lorsque l'on applique une tension de polarisation U à celle-ci, entre la partie dopée P et la partie dopée

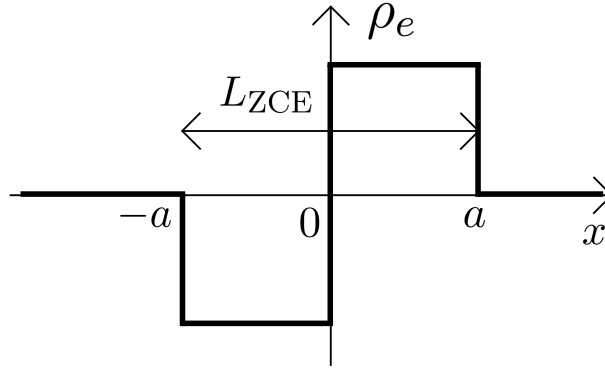


FIGURE 8 – Allure de $\rho_e(x)$ dans le cadre de l'approximation d'une ZCE abrupte.

N. On supposera que la tension U se retrouve appliquée directement aux bornes de la ZCE, le champ électrique étant quasi nul dans les semi-conducteurs hors de celle-ci. La différence de potentiel aux bornes de la ZCE passe donc de $V(a) - V(-a) = U_0$ à $V(a) - V(-a) = U_0 - U$.

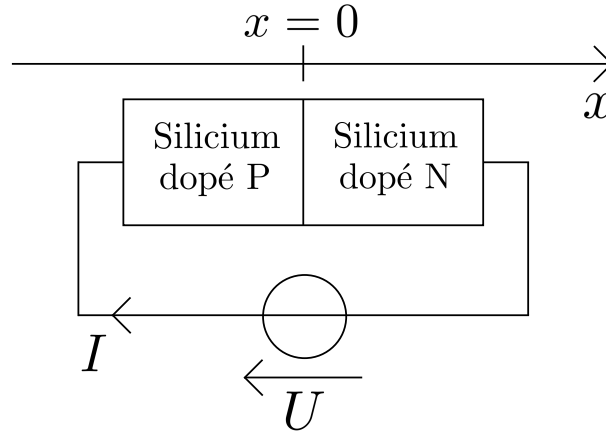


FIGURE 9 – Orientation du courant I et de la tension U .

Le courant I résultant de l'application de cette tension est bien sûr dû au flux d'électrons d'une part, et au flux de trous d'autre part. Nous raisonnerons tout d'abord sur le flux d'électrons. Divers phénomènes sont à prendre en compte. On note $n(x)$ la densité d'électrons de conduction en x .

- La diffusion des électrons de conduction, qui s'effectue selon la loi de FICK, le coefficient de diffusion des électrons dans le matériau étant noté D_n .
- La conduction électrique, la densité de courant de conduction due aux électrons étant modélisée par la loi d'OHM locale :

$$\vec{j}_{\text{cond},n}(x) = \mu_n e n(x) \vec{E}(x), \quad (9)$$

où μ_n est le coefficient de mobilité des électrons au sein du semi-conducteur.

- L'annihilation et la création d'électrons de conduction. En effet, au cours de leur déplacement dans le matériau dopé P, les électrons ont une certaine probabilité de « tomber » dans un trou et ainsi ne plus pouvoir participer à la conduction. À l'inverse, l'agitation thermique peut créer des paires « électron de conduction + trou ». L'ensemble de ces phénomènes résulte en un terme de création d'électrons de conduction par unité de temps et par unité de volume noté c_n et donné par :

$$c_n(x) = \frac{n_P - n(x)}{\tau_n}, \quad (10)$$

où n_P est la densité d'électrons de conduction dans le matériau dopé P à l'équilibre, correspondant à la densité fournie par l'Éq. (7), et τ_n est une durée caractéristique du matériau considéré.

III.C.a Étude du matériau dopé P hors de la ZCE

Nous commençons par étudier la région $x \leq -a$, dopée P, où les électrons sont nettement minoritaires par rapport aux trous. Le champ électrique y étant quasi nul, on négligera tout flux d'électrons dû aux phénomènes de conduction.

- 39.** En effectuant un bilan à préciser, montrer qu'en régime stationnaire, la densité d'électrons de conduction vérifie, dans la région $x \leq -a$:

$$\frac{d^2 n}{dx^2}(x) - \frac{1}{\tau_n D_n} n(x) = -\frac{n_P}{\tau_n D_n}. \quad (11)$$

- 40.** En déduire que l'on a, dans la région $x \leq -a$:

$$n(x) = n_P + (n(-a) - n_P) \exp\left(\frac{x + a}{L_n}\right), \quad (12)$$

où L_n est une longueur typique à exprimer en fonction de τ_n et D_n .

- 41.** En déduire que l'intensité du courant due aux électrons traversant la section en $x = -a$, comptée positivement vers les x croissants, s'exprime

$$I_n = \frac{SeD_n}{L_n} (n(-a) - n_P). \quad (13)$$

III.C.b Étude de la ZCE

Compte tenu de l'approximation d'une ZCE « abrupte » qui a été faite, les charges initialement disponibles pour la conduction dans les matériaux dopés sont exactement compensées par la densité volumique de charge ρ_e au sein de la ZCE. Il n'y a donc aucun processus de création ou d'annihilation possible lors de la traversée de la ZCE. Ainsi, le flux d'électrons venant du matériau dopé N et entrant dans la ZCE en $x = a$ est égal à celui qui en ressort en $x = -a$. L'intensité I_n exprimée dans la sous-partie précédente donne donc exactement la contribution des électrons au courant I .

Néanmoins, pour déterminer I_n , il reste à connaître $n(-a)$. Pour cela, il faut raisonner sur la région $-a \leq x \leq a$, c'est-à-dire la ZCE. Il y règne de forts courants de diffusion et de conduction tant pour les électrons que pour les trous. On notera $I_{\text{diff},n}$ et $I_{c,n}$ les intensités respectives des courants de diffusion et de conduction dus aux électrons dans la ZCE, et on admettra que $I_{\text{diff},n} \gg I_n$ et $I_{c,n} \gg I_n$. Par ailleurs, les électrons étant largement majoritaires vis-à-vis des trous dans la région $x \geq a$, qui est dopée N, on supposera que $n(a) = n_N$.

- 42.** Par un bilan à préciser, montrer qu'en régime permanent on a, au sein de la ZCE, donc sur l'intervalle $x \in [-a, a]$:

$$\frac{dn(x)}{n(x)} = \frac{\mu_n}{D_n} dV(x). \quad (14)$$

- 43.** En déduire les deux égalités suivantes :

$$\ln\left(\frac{n(-a)}{n_N}\right) = \frac{\mu_n}{D_n}(U - U_0) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{n_P}{n_N}\right) = -\frac{\mu_n}{D_n}U_0. \quad (15)$$

En injectant les Éq. (6), (7) et (8) dans la seconde de ces deux égalités, on obtient la relation d'EINSTEIN, que nous admettrons pour la suite :

$$\frac{\mu_n}{D_n} = \frac{e}{k_B T}. \quad (16)$$

44. Montrer alors que l'on a :

$$n(-a) = n_P \exp\left(\frac{eU}{k_B T}\right). \quad (17)$$

45. En déduire enfin l'expression de I_n en fonction de S , e , D_n , L_n , n_P , e , U , k_B et T .

46. On définit D_p et L_p , analogues pour les trous des grandeurs D_n et L_n définies pour les électrons. Par un argument simple, justifier que l'intensité du courant total traversant la jonction PN, du semi-conducteur dopé P vers celui dopé N, s'exprime

$$I = I_0 \left[\exp\left(\frac{U}{V_T}\right) - 1 \right]. \quad (18)$$

où V_T est à exprimer en fonction de e , k_B et T , et I_0 en fonction de S , e , D_n , D_p , L_n , L_p , n_P et p_N .

47. Estimer l'ordre de grandeur de V_T à 25 °C. Commenter et tracer l'allure de la caractéristique courant-tension d'une diode à jonction PN sachant que $I_0 \sim 1$ pA.

*** FIN DU SUJET ***