Planche 1

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. Un joueur effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur au numéro tiré juste avant ou que l'urne soit vide (par exemple, une suite de tirages possible est $8, 4, 5$, on s'arrête alors après ce troisième tirage). Si l'urne devient vide sans que le joueur n'ait jamais tiré un numéro plus grand que le précédent, il ne gagne pas d'argent. Sinon, il gagne k euros où k est le nombre de tirage qu'il a effectués. On note X_n le gain du joueur.

1. Quelles sont les valeurs prises par X_n ?
2. Calculer $P(X_n = 0)$.
3. Déterminer $P(X_n = 2)$ (on pourra utiliser un argument de symétrie).
4. Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a $P(X_n = n) = \frac{n-1}{n!}$.
5. Justifier que pour $n \geq k \geq 2$, on a $P(X_n = k) = P(X_k = k)$. En déduire la loi de X_n.
6. Quelle est la limite de $E(X_n)$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq e^a + (x-a)e^a$. Dans quels cas a-t-on égalité ?
2. Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité obtenue au 1. avec $x = f(t)$ pour $t \in [0, 1]$ et $a \in \mathbb{R}$ une constante bien choisie, montrer que
$$\exp\left(\int_0^1 f(t)dt\right) \leq \int_0^1 \exp(f(t))dt.$$
Dans quels cas y a-t-il égalité ?

Planche 2

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Un joueur va au casino avec une fortune $a \in \mathbb{N}$. A chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité p et perdre 1 euro avec une probabilité $q = 1 - p$. Son but est de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $c \geq a$, $c \in \mathbb{N}$. mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ sa probabilité de succès (atteindre c avant la ruine).

1. Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$.
2. Montrer, en raisonnant sur ce qui s'est passé au premier coup, pour $0 < a < c$, la relation
$$s_c(a) = ps_c(a+1) + qs_c(a-1).$$
3. On pose $r = q/p$ et $u_a = s_c(a) - s_c(a-1)$. Montrer la relation
$$u_{a+1} = ru_a.$$
4. En déduire la valeur de $s_c(a)$.

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $v_n = ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.
2. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
3. Montrer que la suite de terme général u_n admet une limite finie strictement positive l.
4. Donner un équivalent simple de n ! quand n tend vers $+\infty$ s'exprimant à l'aide de l.

Planche 3

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance une pièce équilibrée, s'il obtient pile il gagne. Sinon, B lance la pièce à son tour. S'il obtient face il gagne. Sinon, c'est de nouveau à A de jouer.... On note A_k (resp. B_k) l'événement « le joueur A (resp. B) gagne à son k-ième lancer ». On suppose que le jeu s'arrête après 10 lancers (5 de chaque joueurs). Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Le joueur A gagne en lançant au plus trois fois la pièce.
2. Le joueur B gagne.
3. Personne ne gagne.
4. On suppose que quelqu'un gagne, quel est la probabilité que cela soit A ?

Exercice 2 Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ g)(x) - 2g(x) + x = 0$.

1. Montrer que g est injective, puis que g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g^{-1} sa réciproque.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $g^k = g \circ g \circ \dots \circ g$ (k fois) et $g^{-k} = (g^{-1})^k$. On convient que $g^0 = Id_{\mathbb{R}}$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $g^k(x) - x = k(g(x) - x)$.
3. On suppose $g(0) > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que
$$g^k(0) \leq x \leq g^{k+1}(0).$$
En déduire un équivalent simple de $gn(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Déterminer toutes les applications g vérifiant l'égalité du début de l'énoncé.

Planche 4

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui décrit le nombre d'enfants d'une famille tirée au hasard uniformément parmi les famille d'une ville A. On tire uniformément un enfant au hasard dans la ville A. On note Y le nombre d'enfants dans sa famille.

1. Que vaut $P(Y=0)$? Justifier que la loi de Y et la loi de X sont a priori différentes.
2. On note n le nombre de familles de A, N le nombre d'enfants. Trouver une relation entre n, N et $E[X]$.
3. On note n_k le nombre de familles de k enfants dans A. Montrer que $P(Y=k) = kn_k/N$, en déduire la loi de Y en fonction de celle de X.
4. Justifier qu'il s'agit bien d'une loi, calculer son espérance.

Exercice 2 Pour tout entier naturel non nul k, la dérivée k-ième d'un produit de deux fonctions n fois dérivables u et v est donnée par la formule suivante (formule de Leibniz) :

$$(uv)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(j)} v^{(k-j)}.$$

On suppose que π est rationnel, autrement dit qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\pi = \frac{a}{b}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)dx = 0$
2. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et k, les valeurs des dérivées k-ièmes de $P_n(x)$ en $x=0$ et en $x=\frac{a}{b}$ sont entières. On pourra distinguer successivement les cas suivants : $k > 2n$, $k < n$ et $n \leq k \leq 2n$.
3. Montrer en effectuant $2n$ intégrations par parties successives que pour tout entier naturel n non nul, $\int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)dx$ est un entier strictement positif. Que peut-on en conclure ?

Planche 5

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 On étudie la taille d'une population de bactéries, dont l'évolution est modélisée de la façon suivante. Le jour 0, la population est constituée d'une seule bactérie. Chaque jour, chaque bactérie se comporte indépendamment des autres et de ce qui s'est passé avant, de la façon suivante :

- avec probabilité p_0 : elle meurt et ne donne pas de descendance,
- avec probabilité p_4 : elle meurt mais donne naissance à 4 bactéries.

Les paramètres p_0, p_4 sont deux réels positifs avec $p_0 + p_4 = 1$.

On cherche à calculer la probabilité que la population finisse par s'éteindre un jour.

Soit x_n la probabilité de l'évènement A_n="la population est éteinte à la n-ième génération"

1. Calculer x_1
2. Montrer que la suite x_n est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $x_{n+1} = p_0 + p_4 x_n^4$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $x_n \leq x$, où x est la plus petite solution de l'équation
$$x = p_0 + p_4 x^4.$$
5. En déduire $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Exercice 2 Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, dérivable sur $]0,\ 1[$ et vérifiant $f \circ f = f$.

On note : $a = \min\{\ f(x)\ ; x \in [0,\ 1]\}$ et $b = \max\{\ f(x)\ ; x \in [0,\ 1]\}$.

1. Justifier l'existence de a et b.
2. Quelle est la restriction de f à $[a, b]$?
3. Quelles sont toutes les fonctions f non constantes vérifiant toutes les hypothèses ci-dessus ? On pourra considérer les valeurs de $f'(a)$ et de $f'(b)$.
4. Quelles sont toutes les fonctions f continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, vérifiant $f \circ f = f$?