



## Planche 19

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

### Exercice 1

Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. Montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ .
2. Calculer  $I_n + I_{n+1}$ .
3. Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$  ?

### Exercice 2

Soit  $a > 0$ . On considère une variable aléatoire  $X$  de loi de Cauchy de paramètre  $a$ , i.e. de densité sur  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}.$$

1. Justifier que  $f$  est bien une fonction de densité et calculer la fonction de répartition de cette variable aléatoire.
2. Que dire de l'espérance de  $X$  ?
3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sign}(x) \frac{\pi}{2}$$

(on pourra par exemple faire une étude de fonction).

4. Soit  $Y$  la variable aléatoire définie par  $Y = 1/X$ . Calculer la fonction de répartition de  $Y$ . Quelle loi reconnaissez-vous ?