ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

Planche 10

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Soit $f : [0, \infty[\mapsto]0, 1]$ une fonction deux fois dérivable et telle que

$$\exists\, \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha f(x) \leq f''(x).$$

1. (a) Montrer que f' est croissante. En déduire que $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existe et calculer sa valeur.

   (b) Montrer que f est décroissante et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. (a) Soit $g(x) = \alpha f^2(x) - (f'(x))^2$. Montrer que g est croissante et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   (b) En posant $f(x) = h(x)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$, montrer que pour tout $x \in [0, \infty[$:

$$f(x) \leq f(0)\exp(-\sqrt{\alpha}x).$$

Exercice 2

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x, c'est-à-dire l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - Y$.

1. Déterminer la loi de Y. Calculer son espérance et sa variance (on remarquera que $Y + 1$ suit une loi classique).
2. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

   En déduire la densité de Z.

3. Calculer l'espérance de Z.