Oral de mathématiques 1
session de juin - juillet 2019

Rapport de jury,
Aurélien Lascroux, Édouard Maurel-Segala

Déroulement de l'épreuve

L'oral de mathématiques 1 du concours d'entrée à l'ENSAE en filière économie et sciences sociales pour la session 2019 se compose de

- 30 minutes de préparation sur deux exercices : l'un de probabilités, l'autre d'algèbre
- 30 minutes d'oral où le candidat expose nécessairement, dans l'ordre de son choix, chacun de ces deux exercices ; après au plus 20 minutes consacrées à un exercice, l'examinateur demande au candidat de présenter le second.

Résultats

La moyenne des notes obtenues est de 11,95, avec un écart-type de 3,7.
Les notes s'échelonnent entre 4 et 20.

Observations d'ordre général

Le jury a eu la satisfaction d'interroger des candidats courtois, s'exprimant avec aisance, manifestement bien préparés à l'utilisation du tableau comme support à leur raisonnement développé à haute voix. Le changement de programme ne semble pas avoir gêné les candidats qui préparaient le concours pour la deuxième année consécutive : dans l'ensemble, les prestations sont au moins d'aussi bonne qualité qu'à la session 2018.
Les candidats ne doivent pas s'étonner que l'examinateur puisse les interrompre, les questionner, leur demander de rappeler une définition ou d'énoncer un théorème, de préciser un raisonnement etc. Cela ne doit en aucun cas être interprété par les candidats comme un signe de désapprobation de ce qu'ils viennent d'exposer.
Le jury a apprécié que des candidats débutent leur oral en présentant honnêtement et clairement ce qu'ils avaient su traiter et ce qui leur avait posé problème. Cela a permis à l'examinateur de les guider au mieux.
Il n'est pas nécessaire pour obtenir une excellente note d'avoir su traiter pendant la préparation l'intégralité des deux exercices. Savoir progresser dans l'exercice en tenant compte des indications supplémentaires de l'examinateur est une qualité appréciée.
Il est particulièrement bienvenu qu'un candidat sache adopter un regard critique sur ses résultats, seul ou avec l'aide de l'examinateur. Ainsi, le jury préfère qu'un candidat admette n'avoir démontré que partiellement le résultat attendu plutôt qu'il affirme l'avoir établi mais n'en fournisse pas de justification précise.

Observations relatives au contenu mathématique des oraux

Les candidats montrent dans l'ensemble de bonnes capacités à présenter des raisonnements clairs et rigoureux.
On pourrait cependant s'attendre à ce que les candidats sachent quels raisonnements par récurrence sont élémentaires, et donc ne nécessitent pas de rédaction exhaustive, et lesquels demandent en revanche un soin particulier.

En **probabilités**,

— Cette année encore, il a été difficile d'obtenir l'allure des courbes de fonctions de densité ou de fonctions de répartition pourtant très simples. Des candidats tracent des courbes de fonctions de répartition ou de fonctions de densité qui semblent tendre vers l'infini.
Certains candidats n'ont qu'une idée très vague du lien entre ces courbes et les calculs menés. Par exemple, dans le cas où X est une variable aléatoire admettant une densité f, il est parfois difficile d'obtenir une interprétation graphique de la probabilité $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$ à l'aide de la courbe de f.

— Si le dénombrement ne constitue certes pas le cœur de la formation en probabilités en filière B/L, le jury s'attend tout de même à ce que le nombre de façons de choisir p éléments dans un ensemble de cardinal n soit connu et rapidement donné par le candidat, ce qui est loin d'être toujours le cas.

— La recherche de la loi de la somme, par exemple, de deux variables aléatoires discrètes X et Y donne lieu à des erreurs (classiques) du type $\{X + Y = n\} = \{X = k\} \cap \{Y = n - k\}$. Certains candidats savent alors se rattraper rapidement ; d'autres ne voient pas pourquoi une telle expression est incorrecte, même après intervention de l'examinateur.

— Les candidats manquent parfois de recul et utilisent des outils inutiles pour obtenir un résultat qui est sinon évident. Ainsi deux candidats qui veulent vérifier que l'intégrale de $f : x \mapsto -x \ln x$ sur l'intervalle semi-ouvert $]0; 1]$ est convergente multiplient $f(x)$ par x^α, avec $\alpha < 1$, puis considèrent la limite en 0 du produit $x^\alpha f(x)$ pour en conclure que f est majorée par une fonction dont ils savent que l'intǵrale est convergente. Comme la fonction f admet une limite finie en 0, un tel détour est superflu.

En **algèbre**,

— Il est souvent difficile, si P est un polynôme et a un réel, d'obtenir la traduction de l'identité $P(a) = 0$ en terme de factorisation du polynôme P par $(X - a)$. La notion d'ordre de multiplicité d'une racine est encore plus méconnue.

— Un certain flou entoure parfois la notion de famille génératrice : ainsi, certains candidats proposent $(1, X, \ldots, X^n)$ comme famille génératrice de n'importe quel sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

— Il est difficile d'obtenir une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel défini par un système d'équations ou, réciproquement, d'obtenir un système d'équations caractérisant un sous-espace vectoriel dont on connaît une famille génératrice (même dans le cas simple d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2). Peu de candidats utilisent les vecteurs colonnes de la matrice pour trouver une famille génératrice de l'image.
Dans le même ordre d'idée, échelonner une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes semblent être la seule méthode connue par certains candidats pour en déterminer le rang. Ainsi, certains candidats ne reconnaissent pas immédiatement une matrice dont le rang est clairement égal à 1 ou 2.

— Des candidats proposent d'exploiter la formule $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i$, pour u vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, afin de calculer le projeté orthogonal du vecteur u sur un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, ce qui a bien peu de chances d'être fructueux lorsque les vecteurs e_i ont été choisis sans tenir compte du sous-espace vectoriel F.

— Dans l'ensemble les connaissances sur les projections orthogonales sont encore modestes. Cela est peut-être dû à la récente apparition de cette notion dans le programme.

— Certains candidats cherchent à utiliser des propriétés hors programme de polynômes annulateurs d'endomorphismes ou de matrices carrées. Les résultats annoncés sont alors souvent faux et, lorsqu'ils sont corrects, les candidats ne savent en général pas les justifier.

Enfin, le jury a vivement apprécié quelques **prestations remarquables** de candidats possédant à la fois une connaissance précise des notions au programme, un savoir-faire témoignant d'une pratique régulière des mathématiques et un recul sur les concepts utilisés et sur les résultats obtenus.
Le jury y voit le signe d'une bonne adéquation entre la préparation menée par les professeurs au cours des deux années de classes préparatoires et les exigences du concours d'entrée à l'ENSAE en filière économie et sciences sociales.

Exemples de sujets posés à l'oral 2019

On trouvera ci-dessous deux sujets proposés à la session 2019.

Sujet 1

Exercice 1

Soit E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \,,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que si deux matrices A, B sont dans E alors la matrice AB est encore dans E. Déterminer $\dim(E)$.
2. Soit $M(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer son rang suivant les valeurs des paramètres réels a, b et c. Calculer, lorsque cela est possible, son inverse $M(a,b,c)^{-1}$.
3. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et suivant toutes *la loi de Fréchet*, c'est-à-dire vérifiant, pour tout réel t,

$$\mathbb{P}(X_i \leq t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathbb{E}[X_i] < +\infty$, autrement dit la variable aléatoire X_i admet un premier moment fini. Que vaut $\mathbb{E}[X_i^2]$?
2. On note $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ la plus grande valeur prise par les variables X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   Montrer l'existence d'un unique réel non nul a_n, que l'on déterminera, tel que la variable aléatoire $\dfrac{M_n}{a_n}$ suive également la loi de Fréchet.

Sujet 2

Exercice 1

On considère la matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel et d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice est A relativement à la base $\mathscr{B}$.

1. Montrer que l'endomorphisme p est une projection.
2. Déterminer une base de l'image de p et une base du noyau de p.
3. Démontrer que p est une projection orthogonale.
4. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 2

Une urne contient initialement deux boules blanches et deux boules noires.
Soit c un entier naturel. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche on s'arrête. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on ajoute encore c boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche, ou indéfiniment si l'on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel non nul, on note E_n l'événement : « les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ».
Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche, et égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X dans le cas $c = 0$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(E_n)$ à l'aide d'un produit.
3. On suppose dans cette question que l'on a $c = 1$.
   (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul n.
   En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
   (b) Déterminer deux réels α et β vérifiant, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n+1} - \frac{\beta}{n+2}$.
   En étudiant la série $\sum (n+3)\mathbb{P}(X = n)$, démontrer que la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.
4. On suppose dans cette question que l'on a $c = 2$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul n. En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
   (b) Donner la loi de X. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?