Oral de mathématiques 2
session de juin 2021

Rapport de jury,

Hakim Boumaza, Aurélien Lascroux

Déroulement de l'épreuve

L'oral de mathématiques 2 est commun aux concours d'entrée à l'ENS de Paris-Saclay et à l'ENSAE en filière économie et sciences sociales. Pour la session 2021, il se compose de :

— 30 minutes de préparation sur deux exercices, l'un de probabilités, l'autre d'analyse

— 30 minutes d'oral où le candidat expose nécessairement, dans l'ordre de son choix, chacun de ces deux exercices ; après au plus 20 minutes consacrées à un exercice, l'examinateur demande au candidat de présenter le second.

Résultats

La moyenne des notes obtenues est de 11,90, avec un écart-type de 3,32. Les notes s'échelonnent de 4 à 20.

Observations d'ordre général

Le jury a eu la satisfaction d'interroger des candidats courtois, agréables, s'exprimant avec aisance, manifestement bien préparés à l'utilisation du tableau comme support à leur raisonnement développé à haute voix.
Les contraintes sanitaires ayant affecté la préparation du concours et le passage de l'oral ne semblent pas avoir gêné les candidats : les prestations sont de qualité comparable à celles observées au cours de sessions précédentes.

Les candidats ne doivent pas s'étonner que l'examinateur puisse les interrompre, les questionner, leur demander de rappeler une définition ou d'énoncer un théorème, de préciser un raisonnement etc. Cela ne doit en aucun cas être interprété par les candidats comme un signe de désapprobation de ce qu'ils viennent d'exposer.

Il n'est pas nécessaire pour obtenir une excellente note d'avoir su traiter pendant la préparation l'intégralité des deux exercices. Savoir progresser dans l'exercice en tenant compte des indications supplémentaires de l'examinateur est une qualité appréciée.

Il est particulièrement bienvenu qu'un candidat sache adopter un regard critique sur ses résultats, seul ou avec l'aide de l'examinateur. Ainsi, le jury préfère qu'un candidat admette n'avoir démontré que partiellement le résultat attendu plutôt qu'il affirme l'avoir établi mais n'en fournisse pas de justification précise.

Le jury est tenu de poser des exercices qui peuvent se résoudre entièrement avec les notions au programme. Certains candidats possédant une culture mathématique dépassant ce cadre utilisent de bonne foi une notion au-delà du programme et sont parfois étonnés lorsque l'examinateur leur demande de fournir une réponse reposant exclusivement sur des notions figurant au programme.
Il nous apparaîtrait profitable que les candidats soient bien au fait des outils mathématiques qu'ils peuvent utiliser librement et de ceux pour lesquels il peut leur être demandé des précisions supplémentaires.

Chaque sujet est posé à plusieurs candidats, ce qui permet au jury d'harmoniser les notes en prenant notamment en compte le fait que telle question ou tel exercice peut avoir présenté une difficulté particulière.

Observations relatives au contenu mathématique des oraux

Les candidats montrent dans l'ensemble de bonnes capacités à présenter des raisonnements clairs et rigoureux. Quelques points de vigilance malgré tout :

— Dans le cadre d'un raisonnement par récurrence, il serait apprécié que les candidats prennent soin de fixer clairement un entier naturel n avant de manipuler une expression dépendant de n.

— Certains candidats pourraient s'interroger davantage sur la nature des objets mathématiques manipulés. Ainsi, il a été fait allusion à une suite « décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$ », à une fonction de deux variables réelles « croissante » ou, de façon plus classique, à une probabilité qui dépend de l'aléa.

— La manipulation régulière des sommes et produits, faisant notamment intervenir des exponentielles, devrait permettre d'éviter que $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ donne 1, ou de confondre $(e^x)^2$ et e^{x^2}.

En **probabilités**,

— Un certain nombre de calculs de loi de variables aléatoires ou d'espérances font intervenir des opérations d'addition, de soustraction et de simplification de fractions. Certains candidats semblent peu familiers de ces opérations, et peinent à simplifier par exemple la fraction $\frac{21}{9}$, alors même qu'ils maîtrisent des formules plus compliquées.

— L'allure des courbes de fonctions de densité ou de fonctions de répartition usuelles, comme celles de la loi normale centrée réduite, pourrait être connue avec moins d'hésitation.

— La recherche de la loi de la somme, par exemple, de deux variables aléatoires discrètes X et Y, donne lieu à des erreurs (classiques) du type $\{X + Y = n\} = \{X = k\} \cap \{Y = n - k\}$. Certains candidats savent alors se corriger rapidement ; d'autres peinent à voir pourquoi une telle expression est incorrecte, même après intervention de l'examinateur.

— Il est rare d'obtenir avec exactitude la condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X pour que la variable X admette une densité. La définition de « F est de classe $\mathscr{C}^1$ » est mal connue.

— Nous avons tout de même constaté avec satisfaction que la plupart des candidats maîtrisent bien les formules des probabilités totales et des probabilités composées et savent les utiliser à bon escient.

En **analyse**,

— La gestion des inégalités est cause fréquente d'erreurs. L'application de la fonction carré aux deux membres d'une inégalité entraîne parfois des inégalités fausses. Lorsqu'interviennent de surcroît une valeur absolue et un passage à l'inverse, la recherche d'un majorant devient difficile, comme lorsqu'il a été demandé de majorer $\dfrac{1}{|5 + 4\cos\theta|}$ pour θ réel.

— Comme en probabilités, il est parfois difficile d'obtenir l'allure des courbes des fonctions usuelles comme la fonction cube, la fonction sinus, la fonction arctangente. À ce propos, plusieurs candidats n'ont pas le réflexe de s'appuyer sur le cercle trigonométrique pour lire une valeur de tangente ou d'arctangente.

Nous comprenons qu'il est devenu d'usage dès le secondaire de ne plus tracer régulièrement à la main des courbes représentatives de fonctions au prétexte que ces courbes sont obtenues bien plus rapidement et avec une plus grande précision en utilisant l'outil informatique. Toutefois, une certaine familiarité avec les comportements asymptotiques des fonctions usuelles, que ce soit en des points singuliers ou à l'infini, est nécessaire, par exemple pour penser à utiliser dans un problème de convergence d'intégrale le fait que la fonction arctangente est majorée par $\frac{\pi}{2}$.

— Le lien logique entre continuité et dérivabilité gagnerait à être mieux connu.

— Plusieurs candidats additionnent des équivalents, par exemple pour déterminer la limite de $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ quand le réel x tend vers 0.

— Justifier qu'une fonction du type $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ puis en calculer la dérivée a donné lieu à des hésitations ou erreurs.
Justifier qu'une fonction définie par $x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ a posé des problèmes aux candidats qui ont été confrontés à cette question.

Enfin, le jury a vivement apprécié quelques **prestations remarquables** de candidats possédant à la fois une connaissance précise des notions au programme, un savoir-faire témoignant d'une pratique régulière des mathématiques et un recul sur les concepts utilisés et sur les résultats obtenus.
Le jury y voit le signe d'une bonne adéquation entre la préparation menée par les professeurs au cours des deux années de classes préparatoires et les exigences du concours d'entrée à l'ENSAE et à l'ENS de Paris-Saclay en filière économie et sciences sociales.

Exemples de sujets posés à l'oral 2021

Sujet 1

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}.$$

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence des intégrales I_n et J_n.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $I_n + J_n$.
3. Au moyen du changement de variable $u = 1/x$, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales I_n et J_n.
4. La suite $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? La série $\displaystyle\sum \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ est-elle convergente ?

Exercice 2

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit les trois variables X, Y, Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé
- X indique le nombre de « piles » obtenus aux lancers de la pièce
- Y indique le nombre de « faces » obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi, on a $X + Y = Z$.

1. Pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = k \mid Z = n)$ (sans calcul).
   En déduire, pour tout couple $(k, n) \in \{0, \dots, N\}^2$, la valeur de la probabilité $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n])$.
2. Montrer, pour tout couple (k, n) d'entiers naturels vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, l'identité :
$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$
3. Démontrer que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres N et $p/6$.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Sujet 2

Exercice 1

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera $\mathbb{P}[A]$ la probabilité d'un évènement $A \in \mathscr{A}$ et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2}\cdot$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Soit Z une variable aléatoire discrète telle que $\exp(\alpha Z)$ est d'espérance finie pour tout $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}[Z \geq t] \leq \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathbb{E}[\exp(\alpha Z)].$$
2. Montrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $\lambda > 0$,
$$\frac{1}{n}\ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \leq \ln(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X_1}]) - \lambda t.$$
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}}{2} \leq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$.
4. En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$,
$$\frac{1}{n}\ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \leq -\frac{t^2}{2}\cdot$$

Exercice 2

1. Etudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, continues sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et telles que :
$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right).$$
3. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right).$$