Numérotation de sommets dans les graphes

Terminologie Un *graphe non orienté* G est un couple (V, E) où V est un ensemble de sommets (cercles) et E est un ensemble d'arêtes (trait entre deux cercles). Le graphe G est dit *connexe* si pour toute paire de sommets $(s,\ t)$, il existe un chemin reliant s à t. Rappellons, qu'un *chemin* C allant de s à t est une suite $u_0, u_1, \cdots, u_\ell$ de sommets telle que $u_0 = s$, $u_\ell = t$, $(u_{i-1}, u_i) \in E$ pour tout $1 \leq i \leq \ell$.

Nous considérons les notations suivantes.

1. $n = |V|$, $m = |E|$.
2. Les sommets u et v sont dits *voisins* s'il y a une arête entre u et v. Le *degré* de v dans G que l'on notera $d_G(v)$ est le nombre de voisins de v.
3. $\Gamma_G(v)$ est l'ensemble des sommets voisin de v dans G.
4. $G\backslash\{v\}$ est le graphe G privé du sommet de v : son ensemble de sommets est $V\backslash\{v\}$ et son ensemble d'arêtes est $E\backslash\{(u, v) : u \in \Gamma_G(v)\}$.

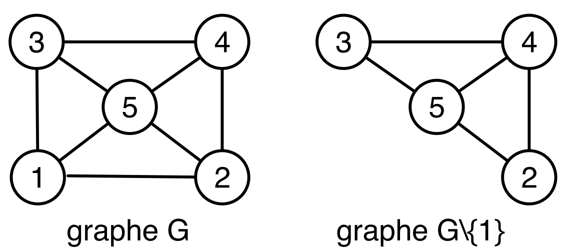

FIGURE 1 – Le graphe planaire G possède une numérotation $\mathcal{L}$ qui est 3-*dégénérée*.

Une *numérotation* des sommets $\mathcal{L} : V \to [1, \ldots, n]$ est une fonction injective qui donne des numéros distincts (des entiers) de 1 à n à chaque sommet. Nous allons nous concentrer sur une numérotation particulière des sommets. Une numérotation $\mathcal{L}$ est dite t-*dégénérée* si pour tout sommet v de V, au plus t des voisins de v ont des numéros plus grand que v, plus formellement,

$$\text{pour tout sommet } v \text{ de } G, \text{ on a } |\{x \in \Gamma_G(v) \text{ tel que } \mathcal{L}(x) > \mathcal{L}(v)\}| \leq t.$$

Nous allons chercher la plus petite valeur $t^*(G)$ telle que G possède une numérotation $t^*(G)$-*dégénérée*.

Question 1. Montrer que $t^*(G) = max(d_G(u_0), t^*(G\backslash\{u_0\}))$ avec u_0 un sommet de G de plus petit degré dans G.

Soit u_0 un sommet de G de plus petit degré dans G.
Prouvons que $t^*(G) \geq max(d_G(u_0), t^*(G\backslash\{u_0\}))$.
Soit $\mathcal{L}^*$ une numérotation telle qu'elle est $t^*(G)$-*dégénérée*. Il suffit de considérer le sommet u numéroté 1. Tous ses voisins ont un numéro plus grand que 1 : pour tout sommet v voisin de u, on a $\mathcal{L}^*(v) > \mathcal{L}^*(u)$. Donc $t^*(G) \geq d_G(u) \geq d_G(u_0)$.

Nous allons transformer $\mathcal{L}^*$ en $\mathcal{L}^{'}$ de telle façon que l'ordre soit conservé à l'exception de u_0 qui prend la valeur 1. Plus formellement,

$$\mathcal{L}^{'}(u) = \begin{cases} 1 \ si \ u = u_0 \\ \mathcal{L}^*(u) + 1 \ si \ \mathcal{L}^*(u) < \mathcal{L}^*(u_0) \\ \mathcal{L}^*(u) \ sinon \end{cases}$$

Il suffit de remarquer que la numérotation $\mathcal{L}^{'}$ est une numérotation du graphe $G \backslash \{u_0\}$. Ainsi elle est aussi t-*dégénérée* pour le graphe $G \backslash \{u_0\}$ avec $t^*(G) \geq t$. Donc $t^*(G) \geq t \geq t^*(G \backslash \{u_0\})$.
Donc, on peut conclure que

$$t^*(G) \geq max(d_G(u_0), t^*(G \backslash \{u_0\}))$$

Prouvons que $t^*(G) \leq max(d_G(u_0), t^*(G \backslash \{u_0\}))$. Pour cela il suffit de transformer *de la bonne façon* une numérotation $\mathcal{L}^{'}$ du graphe $G \backslash \{u_0\}$ qui est $t^*(G \backslash \{u_0\})$-*dégénérée*.
Soit $\mathcal{L}^{'}$ une numérotation de sommets de $G \backslash \{u_0\}$ telle qu'elle est $t^*(G \backslash \{u_0\})$-*dégénérée*. Nous allons construire une numérotation $\mathcal{L}$ de sommets de G

$$\mathcal{L}(u) = \begin{cases} 1 \ si \ u = u_0 \\ \mathcal{L}^{'}(u) + 1 \ sinon \end{cases}$$

Il suffit de voir que la numérotation $\mathcal{L}$ est aussi x-*dégénérée* pour le graphe G avec $x = max(d_G(u_0), t^*(G \backslash \{u_0\}))$.

$$t^*(G) \leq max(d_G(u_0), t^*(G \backslash \{u_0\}))$$

Question 2. Un *arbre* $G = (V, E)$ est un graphe sans cycle (un cycle est une suite d'arêtes consécutives (chaine) dont les deux sommets extrémités sont identiques). Donner la valeur de $t^*(G)$ lorsque G est un arbre.

Il suffit de voir qu'un arbre possède une numérotation 1-*dégénérée*. Pour cela, il suffit d'observer qu'un arbre privé d'une feuille (sommet de degré 1) reste toujours un arbre. Pour construire une numérotation $\mathcal{L}$ 1-*dégénérée* sur un arbre G, il suffit de trouver une feuille v et de définir $\mathcal{L}(v)$ à 1. Ensuite, nous supprimons le sommet v, et nous itérons le processus.

Question 3. Décrire un algorithme qui, étant donné un graphe G, retourne $t^*(G)$ et une numérotation $\mathcal{L}$ qui est $t^*(G)$-*dégénérée*. Évaluer la complexité de cet algorithme.

Notons n le nombre de sommets du graphe G.

Entrée : un graphe G
Sortie : une numérotation $\mathcal{L}$ qui est $t^*(G)$-dégénérée

1. $\mathcal{L} \leftarrow \emptyset$

2. pour i allant de 1 à n faire
   (a) calculer $\mathcal{D}(G)$ où l'ensemble est l'ensemble de sommets de plus petit degré dans G ;
   (b) extraire un sommet v_i de $\mathcal{D}(G)$;
   (c) $\mathcal{L}(v_i) = i$
   (d) $G = G\backslash\{v\}$
3. Retourner $\mathcal{L}$

Complexité : Au total $O(n^2)$ opérations.

La boucle for est exécutés n fois. Maintenant focalisons nous sur les instructions $2.(a)$, $2.(b)$, $2.(c)$ et $2.(d)$. Remarquons que les instructions $2.(b)$, $2.(c)$ peuvent se faire en $O(1)$ opérations. L'instruction $2.(d)$ peut être couteuse si le graphe est recopié. Sinon, il suffit de supprimer toutes les arêtes incidentes à v ($O(n)$ opérations si le graphe est codé en utilisant une matrice d'adjacence).

Focalisons nous sur l'instruction $2.(a)$. Calculer les degrés de tous sommets d'un graphe peuvent se faire en $O(n^2)$ opérations si le graphe est codé en utilisant une matrice d'adjacence ou en $O(|E|)$ opérations au total si le graphe est codé en utilisant sa liste d'adjacente. Si pour chaque itération de la boucle nous devons calculer les degrés de tous les sommets, exécuter n fois l'instruction $2.(a)$ nécessite $O(n^3)$ opérations (ou $O(|E|n)$ opérations en fonction du codage). Afin de réduire la complexité, on peut réaliser l'astuce suivante :

1. Tout d'abord, il suffit de précalculer le degré de tous les sommets et de les stocker dans un tableau.
2. Trouver le sommet de degré minimum revient à trouver la valeur minimum dans un tableau ($O(p)$ opérations avec p le nombre d'éléments dans le tableau).
3. Ensuite lorsqu'on supprime un sommet v du graphe courant on réactualise le degré de tous les sommets voisin de v en décrémentant de 1 sa valeur. ($O($ degré de $v)$ opérations). Au total, pour toutes les itérations de la boucle for, ces instructions nécessitent $O(|E|)$ opérations) Remarquons que cette opération peut remplacer l'instruction $2.(d)$

Question 4. Soit k un entier. Donner le nombre d'arêtes maximum d'un graphe G de n sommets tel que $t^*(G) = k$ et $n \geq k+1$.

Rappellons qu'une *clique* est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est liée par une arête.

— Cas $n = k+1$: c'est le cas où G possède moins de k sommets. G est une clique ayant $\frac{k(k+1)}{2}$ arêtes.

— Cas $n > k+1$. Nous allons construire G de la façon suivante :

   1. tous les sommets sont numérotés de 1 à n ;

2. le sommet de numéro i avec $1 \leq i \leq n-(k+1)$, a les sommets $i+1, \ldots, i+k$ comme voisin ;
3. tous les sommets de $j = n-k+1$ à n forment une clique dans G.

Donc le nombre d'arêtes est $(n-(k+1))k + \frac{k(k+1)}{2} = (n-k)k + \frac{k(k-1)}{2}$.

Colorer un graphe G signifie attribuer une couleur à chacun des sommets de G telle qu'aucune arête de G a deux extrémités de la même couleur.

Question 5. Montrer que si G possède une numérotation $\mathcal{L}$ qui est t-*dégénérée*, alors G peut être coloré en $t+1$ couleurs. En déduire un algorithme et donner sa complexité.

Nous allons introduire les notations suivantes :

1. $[t+1]$: l'ensemble de $t+1$ premiers entiers
2. $\Gamma_G(u)$: l'ensemble des voisins de u dans G.
3. u_i : le sommet de numéro i ;

Entrée : un graphe G et une numérotation $\mathcal{L}$ qui est t-dégénérée
Sortie : un tableau C tel que $C[u]$ représente la couleur du sommet u

1. $C[u_n] = 1$ avec $\mathcal{L}(u_n) = 1$
2. pour i allant de $n-1$ à 1 faire
   (a) notons u_i le sommet tel que $\mathcal{L}(u_i) = i$
   (b) Calculons $X = [t+1] \backslash \{C[u] : j > i \wedge \mathcal{L}(u) = j \wedge u \in \Gamma_G(u_i)\}$
   (c) $C[u_i] = c$ tel que $c \in X$
3. Retourner C

Complexité : On fait n fois la boucle. En fonction de la façon de coder le graphe, l'instruction (2.b) peut se faire en t opérations (au pire des cas). En effet, il suffit que le graphe soit codé en utilisant la liste d'adjacente et la numérotation $\mathcal{L}$ pour les sommets. Si ce n'est pas le cas, l'instruction (2.b) peut se faire en $O(n-i)$ opérations à la $i$ème itération. En conclusion, la complexité est soit $O(tn)$ ou $O(n^2)$ selon la représentation du graphe.

Un graphe $G = (V, E)$ est *régulier* si tous ses sommets ont le même nombre de voisins.

Notons par la suite $\Delta(G)$ le degré maximum du graphe ($\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V\}$).

Question 6. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Montrer que G est *régulier* si et seulement si $t^*(G) = \Delta(G)$.

Si G est k-régulier, alors le graphe G possède une numérotation k-dégénéré (car tous les sommets sont de même degré).

Tout d'abord nous allons calculer la valeur $t^*(G)$ et une numérotation $\mathcal{L}$ qui est $t^*(G)$-dégénérée en utilisant la question **3**. Cela signifie que le sommet u avec $\mathcal{L}(u) = i$ est un sommet de plus petit degré dans $G_i = (V_i, E_i)$ tel que $V_i = \{v \in V : \mathcal{L}(u) > i\}$ et $E_i = E \cap (V_i \times V_i)$.

Rappellons que $t^*(G) = \Delta(G)$. Cela signifie qu'il existe un sommet v_i tel qu'il a $\Delta(G)$ voisins de numéro plus grand dans G. Considérons le sommet v qui satisfait cette propriété de numéro le plus petit. nous avons que pour tout sommet w tel que $\mathcal{L}(w) > \mathcal{L}(v)$, le degré de w dans $G_{\mathcal{L}(v)}$ est $\Delta(G)$.

Si $\mathcal{L}(v) > 1$, la connexité de G implique l'existence d'une arête (x, y) avec $\mathcal{L}(x) \geq \mathcal{L}(v) > \mathcal{L}(y)$. Cela signifie que x est de degré au moins $\Delta(G) + 1$ dans G. Ceci est en contradiction avec la définition de $\Delta(G)$. Donc $\mathcal{L}(v) = 1$.

$\mathcal{L}(v) = 1$ implique que le degré de tous les autres sommets est $\Delta(G)$. Donc G est régulier.

Question 7. Montrer que si G n'est pas régulier, alors G peut être coloré en $\Delta(G)$ couleurs.

On en déduit des deux précédentes questions.