

Rapport de jury

Second concours session 2017 - ENS Cachan et ENS Rennes

Épreuve de probabilités et statistique

Le sujet est composé de trois parties. Il est consacré à l'estimation des quantiles d'une loi de probabilité. La première partie s'intéresse à l'estimateur classique utilisant les statistiques d'ordres. En particulier la question 1 aborde la convergence forte de l'estimateur et la question 3 traite de la normalité asymptotique. Enfin, un intervalle de confiance est établi à la question 4 tandis que les questions 2 et 5 s'intéressent au cas particulier du sup et de l'inf des échantillons. Notons qu'aucune connaissance préalable concernant les statistiques d'ordres n'est nécessaire pour traiter le sujet. Les parties 2 et 3 sont consacrées à un autre estimateur donné par un algorithme stochastique. En particulier, le but de la deuxième partie est d'établir la convergence forte de l'estimateur (questions 1, 2 et 3) tandis que la troisième partie permet d'obtenir la normalité asymptotique de cet estimateur. Enfin la question 4 de la partie 2 étudie le comportement de l'estimateur lorsque l'on cherche la borne supérieure du support de la loi.

1 Quelques éléments statistiques sur les 23 copies

- Meilleure note : 20, deuxième meilleure note : 16, note la plus faible : 3, 9
- Moyenne : 10,09, écart-type : 4,01
- Premier quartile : 7,3, médiane : 9,7, troisième quartile : 13,3.

2 Commentaires sur les différentes parties

- La partie 1 a été la plus traitée avec plus ou moins de réussite. Concernant la question 1), les deux premières sous-questions a) et b) ont été correctement traitées par la quasi totalité des candidats, mais il n'en est pas de même pour la sous-question c). En particulier un seul candidat a réussi à démontrer correctement la convergence presque sûre et, ce qui est beaucoup plus surprenant, seulement un autre candidat a pu, à défaut, démontrer correctement la convergence en probabilité. Concernant la question 3, encore une fois les deux premières sous-questions a) et b) ont été correctement traitées par la quasi totalité des candidats, tandis que la sous-question c) a été abordée par la quasi totalité des candidats mais traitée correctement par seulement deux candidats. Pour cette question c) il s'agissait de calculer la limite simple de la fonction caractéristique de V_n en faisant un développement asymptotique adéquat. Pour la sous question d) quasiment aucun candidat n'a su la traiter, en utilisant notamment le lemme de Slutsky. La question 5) a été traitée par un tiers des candidats mais peu de candidats ont obtenu la totalité des points pour la sous-question b), les autres s'étant perdus dans leurs calculs de limite.
- La partie 2 nécessitait d'utiliser une de nombreuses reprises des propriétés de l'espérance conditionnelle. La question 1 a été abordée par la quasi totalité des candidats mais seule-

ment deux candidats ont eu la totalité des points. En particulier il convenait de justifier proprement le calcul de $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n} | \mathcal{F}_n]$. La question 2 a été traitée correctement par la majorité des candidats tandis que les questions 3)c) et 4)a) ont été correctement traitées par la moitié des candidats. Enfin une minorité de candidats a abordé les questions 3)a), 3)b), 4)b), 4)c) et 4)d).

- La partie 3 commençait par une question de vérification qui méritait de l'attention pour être traitée correctement. Beaucoup de candidats se sont jetés dessus en pensant pouvoir s'en sortir facilement mais se sont rapidement embourbés dans les calculs. Au final seuls deux candidats ont réussi à démontrer l'égalité demandée. Les questions 2 et 4)a) ont été correctement traitées par une petite moitié des candidats. Les autres questions de la partie 3) ont été soit très peu abordées (questions 3), 4)b), 4)d), 6) et 7)), soit pas du tout traitées.

3 Conclusion

Pour traiter correctement ce sujet il fallait maîtriser des notions et des outils classiques de probabilité (convergence, espérance conditionnelle, fonction caractéristique, fonction de répartition, martingale) sans jamais aller au delà du niveau M1. Il était possible d'obtenir une très bonne note sans toucher à la dernière partie qui était plus technique. Beaucoup de points ont été perdus inutilement par des calculs trop approximatifs ou des raisonnements trop vaguement exprimés. Il est recommandé aux candidats d'expliquer leurs démarches par des phrases claires et précises et pas seulement par des calculs secs. Nous notons également des lacunes des candidats sur des notions et des calculs qui ne devraient pas poser de problèmes à la majorité d'entre eux, en particulier la convergence en probabilité de la question 1)c) (partie 1) et la convergence de la fonction caractéristique de la question 3)c) (partie 1).