2C7121

Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay
Ecole Normale Supérieure de Rennes

SECOND CONCOURS – ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2017

Épreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Épreuve de Mathématiques Générales

Dans tout le problème, P désigne un polynôme unitaire de degré $d \geq 2$. Autrement dit, il existe $(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{C}^d$ tels que

$$P(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Pour tout $n \geq 0$, on définit l'*itérée n-ième* P^n de P par récurrence par $P^0 = \mathrm{id}$ et $P^{n+1} = P \circ P^n$. Le but du problème est d'étudier les propriétés dynamiques élémentaires de P, c'est-à-dire le comportement de la suite $(P^n(z))_{n \geq 0}$ et sa dépendance au point $z \in \mathbb{C}$.

$\Diamond$

Notations

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, $D(a, r)$ désigne le disque $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - a| < r\}$ de $\mathbb{C}$, $\mathbb{S}^1$ désigne le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$ de $\mathbb{C}$ et si $E \subset \mathbb{C}$, $\overline{E}$ désigne son adhérence, $\mathring{E}$ son intérieur et $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$ sa frontière.
On définit le *bassin de l'infini* $\mathcal{A}_P(\infty)$ du polynôme P par

$$\mathcal{A}_P(\infty) := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \lim_{n \to +\infty} |P^n(z)| = +\infty\}.$$

On définit également l'*ensemble de Julia rempli* K_P de P et l'*ensemble de Julia* J_P de P comme

$$K_P = \mathbb{C} \setminus \mathcal{A}_P(\infty)\ , \quad \text{et} \quad J_P = \partial K_P\ .$$

On dira qu'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est *périodique* pour P s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $P^n(z_0) = z_0$. On dit que z_0 est de *période* n si $P^n(z_0) = z_0$ et si $P^k(z_0) \neq z_0$ pour tout entier $1 \leq k \leq n-1$. On note $\lambda = (P^n)'(z_0)$ le *multiplicateur* du point périodique z_0 de période n. On dira que

- z_0 est *super-attractif* si $\lambda = 0$,
- z_0 est *attractif* si $0 < |\lambda| < 1$,
- z_0 est *répulsif* si $|\lambda| > 1$,
- z_0 est *neutre* si $|\lambda| = 1$.

$\Diamond$

Rappels

Rappelons que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et non-constante, alors f est *ouverte*, i.e. pour tout ouvert $U \subset \Omega$, son image $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.
Nous utiliserons également dans le problème les résultats suivants :

Théorème 1 (Principe du module maximum) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné et soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction qui est continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω. Alors*

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \max_{w \in \partial\Omega} |f(w)|.$$

De plus, s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|$, alors f est constante sur Ω.

Théorème 2 (Principe du prolongement analytique) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur Ω. Supposons que l'ensemble $E = \{z \in \Omega\,;\ f(z) = g(z)\}$ admette un point d'accumulation dans Ω. Alors $f \equiv g$ sur Ω.*

Un exemple typique de fonction holomorphe est un polynôme complexe $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Rappelons que tout polynôme unitaire P de degré $d \geq 1$ satisfait les propriétés suivantes :
- $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, i.e. P est surjectif,
- tout point $\alpha \in \mathbb{C}$ admet exactement d préimages comptées avec multiplicité, i.e. il existe un nombre fini de points $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ et des entiers $n_1, \dots, n_k \geq 1$ tels que $\sum_j n_j = d$ et $P(z) - \alpha = \prod_j (z - z_j)^{n_j}$.

$\Diamond$

Première partie : fonctions holomorphes propres du disque unité

Soient $X, Y \subset \mathbb{C}$ deux ouverts. On dit qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ est *propre* si la préimage $f^{-1}(K)$ de tout compact $K \subset Y$ est un sous-ensemble compact de X.

Le but de cette partie est d'étudier les fonctions holomorphes propres du disque unité $D(0,1)$ dans lui-même.

1. Soit $f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$.
   (a) Montrer que la fonction $g : D(0,1) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ s'étend en une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ que l'on notera encore g.
   (b) Fixons $0 < r < 1$. Prouver que $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ pour tout $z \in D(0,r)$.
   (c) En déduire que $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D(0,1)$, puis que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0,1)$.
   (d) Supposons qu'il existe $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, déterminer l'expression de f dans ce cas.
2. Pour tout $a \in D(0,1)$, on pose $\phi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\bar{a}\}$.
   (a) Montrer que ϕ_a est holomorphe sur $D(0,1)$ et continue sur $\overline{D(0,1)}$, puis que $|\phi_a(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$,
   (b) En déduire que ϕ_a est une bijection holomorphe de $D(0,1)$ dans $D(0,1)$ dont on déterminera l'inverse.

   On suppose dorénavant et jusqu'à la fin de la partie que $f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ est holomorphe et propre.
3. Soit $(x_n)_n$ une suite de points de $D(0,1)$ qui converge vers $x \in \overline{D(0,1)}$. Supposons qu'il existe $r \in]0,1[$ tel que $|f(x_n)| \leq r$ pour tout n. Montrer que $|x| < 1$ et en déduire que
$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 1.$$
4. Montrer que l'image de $D(0,1)$ par f est un sous-ensemble fermé de $D(0,1)$, puis en déduire que f est surjective de $D(0,1)$ dans $D(0,1)$.
   (*Indication : on pourra utiliser un argument de connexité.*)

5. Montrer qu'il existe $d \geq 1$ tel que $f^{-1}(\{0\})$ contient d points comptés avec multiplicité, i.e. qu'il existe un nombre fini de points $z_1, \dots, z_k \in D(0,1)$ et des entiers $n_1, \dots, n_k \geq 1$ tels que $\sum_j n_j = d$ et, pour tout $1 \leq j \leq k$, $f(z) = (z - z_j)^{n_j} h_j(z)$ au voisinage de z_j, où h_j est une fonction holomorphe définie au voisinage de z_j qui ne s'annule pas.
6. On définit $g : D(0,1) \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{1 - \bar{z}_j z}{z - z_j} \right)^{n_j} \quad \text{pour tout } z \in D(0,1) \setminus \{z_1, \dots, z_k\}.$$

   (a) Montrer que g s'étend en une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ et que $\lim_{|z| \to 1} |g(z)| = 1$. En déduire que $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D(0,1)$.
   (b) Montrer de même que $1/g$ s'étend en une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ et que $|g(z)| \geq 1$ pour tout $z \in D(0,1)$.
   (c) En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right)^{n_j} \quad \text{pour tout} \quad z \in D(0,1).$$

$\Diamond$

Deuxième partie : premiers exemples

Lorsque X est un ensemble quelconque et $f : X \longrightarrow X$ est une application, on dit que $A \subset X$ est *totalement invariant* par f si $f(A) = f^{-1}(A) = A$.

7. Posons $P_0(z) = z^d$, avec $d > 1$. Donner une formule pour P_0^n, puis déterminer le bassin de l'infini $\mathcal{A}_{P_0}(\infty)$ de P_0.
8. Déterminer K_{P_0} et J_{P_0}.
9. Déterminer l'ensemble des points périodiques de P_0 et montrer que si z_0 est périodique pour P_0, alors
   — soit $z_0 = 0$, auquel cas z_0 est fixe et super-attractif,
   — soit z_0 est répulsif et, si z_0 est de période n, son multiplicateur est d^n.
10. Montrer que pour tout $z \neq 0$, on a

$$\mathbb{S}^1 \subset \overline{\bigcup_{n \geq 1} (P_0^n)^{-1}(\{z\})}.$$

   (*Indication : On commencera par décrire $(P_0^n)^{-1}(\{z\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de z.*)
   Sous quelle condition sur z s'agit-il d'une égalité ?
11. Soit P un polynôme unitaire quelconque de degré d. Supposons que $\mathbb{S}^1$ est totalement invariant par P. Le but est de montrer que $P = P_0$.
   (a) Montrer que $D(0,1)$ et $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$ sont totalement invariants par P en utilisant un argument de connexité.
   (b) Déduire de la partie précédente que $P(z) = z^d$ sur $D(0,1)$.
   (c) Conclure.

12. Rappelons que l'on peut définir la fonction cos sur $\mathbb{C}$ comme suit :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ , \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Prouver que pour tout $d \geq 2$, il existe un unique polyôme T_d de degré d tel que

$$\cos(dz) = T_d(\cos(z))$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.
(*Indication : On pourra utiliser la formule* $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.)

13. Posons également

$$\varphi(z) = \frac{z + 1/z}{2} \ , \ z \in \mathbb{C}^*.$$

Prouver que $\varphi(z) \in [-1, 1]$ si et seulement si $|z| = 1$.

14. Prouver que φ est une bijection holomorphe de $D(0,1) \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
15. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $T_d \circ \varphi(z) = \varphi \circ P_0(z)$.
(*Indication : On pourra commencer par le montrer lorsque* $|z| = 1$.)
16. Déduire de la question précédente que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \geq 1$, on a

$$T_d^n \circ \varphi(z) = \varphi \circ P_0^n(z).$$

17. En déduire que $\mathcal{A}_{T_d}(\infty) = \mathbb{C} \setminus [-1; 1]$ et que $K_{T_d} = J_{T_d} = [-1; 1]$.
18. On suppose que l'intervalle $[-1; 1]$ est totalement invariant par un polynôme unitaire P.
   (a) Montrer que $\varphi^{-1} \circ P \circ \varphi : D(0,1) \setminus \{0\} \to D(0,1) \setminus \{0\}$ s'étend en une fonction holomorphe sur $D(0,1)$.
   (b) Prouver que $\varphi^{-1} \circ P \circ \varphi = P_0$ sur $D(0,1)$.
   (c) En déduire que $P = T_d$.
   (*Indication : On pourra utiliser le principe du prolongement analytique.*)

$\Diamond$

Troisième partie : propriétés de l'ensemble de Julia J_P

Rappelons que P est un polynôme un unitaire de degré $d > 1$: il existe $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Dans la suite, on notera

$$R_0 := \max\left\{1, 1 + \sum_{j=0}^{d-1} |a_j|\right\}.$$

19. Montrer que $U_0 := \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R_0)}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_P(\infty)$.
20. En déduire que $\mathcal{A}_P(\infty) = \bigcup_{n\geq1}(P^n)^{-1}(U_0)$ et que $\mathcal{A}_P(\infty)$ est un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$.
21. Montrer que K_P et J_P sont compacts et que $z \in K_P$ si et seulement si $(P^n(z))_{n\geq1}$ est une suite bornée dans $\mathbb{C}$.

22. Prouver que K_P et J_P sont non-vides et que J_P est d'intérieur vide.
(*Indication : On constatera que* $J_P \cup \mathring{K}_P \cup \mathcal{A}_P(\infty)$ *est une union disjointe et on utilisera un argument de connexité pour montrer que* $J_P \neq \emptyset$.)

23. Soit X un espace topologique, $f : X \to X$ une application et $A \subset X$.
   (a) Montrer que si $f^{-1}(A) = A$ et f surjective, alors $f(A) = A$.
   (b) Montrer que si f est ouverte et $f^{-1}(A) = A$, alors $f^{-1}(\partial A) \subset \partial A$.
   (c) Montrer que si f est continue et $f^{-1}(A) = A$, alors $\partial A \subset f^{-1}(\partial A)$.

24. Déduire de la question précédente que $\mathcal{A}_P(\infty)$, K_P, J_P et $\mathring{K}_P$ sont des ensembles totalement invariants par P.

25. Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a $K_{P^n} = K_P$ et $J_{P^n} = J_P$.

26. En raisonnant par l'absurde, prouver que $\mathcal{A}_P(\infty)$ est connexe.
Rappelons qu'un ouvert connexe non-vide U de $\mathbb{C}$ est *simplement connexe* si tout chemin continu $\gamma : [0,1] \to U$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$ est homotope à un lacet constant dans U, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $\Phi : [0,1]^2 \to U$ telle que
— $\Phi(t, 0) = \gamma(t)$ pour tout $0 \leq t \leq 1$.
— $\gamma_s := \Phi(\cdot, s) : [0,1] \to U$ est un chemin continu et $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ pour tout $0 \leq s \leq 1$.
— γ_1 est constant.
On dit que Φ est une *homotopie* entre γ et un chemin constant.

27. On cherche à montrer que toute composante connexe de $\mathring{K}_P$ est un ouvert connexe borné simplement connexe de $\mathbb{C}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une composante connexe de U de $\mathring{K}_P$ qui n'est pas simplement connexe. Prouver qu'il existe un ouvert non-vide borné V tel que $V \subset \mathcal{A}_P(\infty)$ et $\partial V \subset K_P$. En utilisant la question précédente, en déduire une contradiction.

◊

FIN DU SUJET