2C7122

Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay
Ecole Normale Supérieure de Rennes

SECOND CONCOURS – ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2017

Epreuve de Mathématiques 2

Durée : 5 heures

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sujet 1- Probabilités et statistiques

Sujet 2- Analyse numérique

Le candidat traitera au choix le sujet 1 ou le sujet 2 et rappellera sur sa copie le sujet qu'il a choisi de traiter.

Sujet 1 : Probabilités et Statistique

Préambule

Ce sujet est consacré à l'estimation des quantiles d'une loi de probabilité. Dans tout le sujet on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La fonction de répartition de ces variables aléatoires est notée F et est supposée continue. Dans certaines questions il est supposé que la loi de ces variables est à densité, dans ce cas la densité est notée f. On se donne maintenant un réel $p \in [0,1]$ et on cherche un réel θ_p vérifiant $F(\theta_p) = p$. Hormis certaines questions (question 5 de la partie 1 et question 4 de la partie 2), on suppose toujours que $p \in]0,1[$ et qu'il existe un unique θ_p vérifiant $F(\theta_p) = p$. La partie 1 étudie l'estimation de θ_p à l'aide des statistiques d'ordre. Les parties 2 et 3 étudient l'estimation de θ_p utilisant un algorithme stochastique récursif : la partie 2 montre la convergence de l'estimateur et la partie 3 s'intéresse à la normalité asymptotique de ce dernier. Hormis quelques questions, ces trois parties sont indépendantes.

Nous allons commencer par préciser certaines notations et donner quelques résultats qui pourront être considérés comme connus. Sous réserve d'existence, l'espérance d'une variable aléatoire réelle Y est notée $\mathbb{E}[Y]$. De plus, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ est une tribu, l'espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{G}$ est notée $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{F}_n$ la tribu $\sigma(\{X_1, ..., X_n\})$ engendrée par $\{X_1, ..., X_n\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Dans tout le sujet on utilise la convention $\inf \varnothing = +\infty$ et $\sup \varnothing = -\infty$. On note $x \wedge y$ (respectivement $x \vee y$) le minimum (respectivement le maximum) entre deux réels x et y. On note également $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Pour une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on note

$$Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Y, \quad (\text{respectivement } Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Y),$$

le fait que Y_n converge en loi (respectivement en probabilité) vers Y.

On rappelle que la fonction caractéristique d'une variable $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est donnée par

$$\phi_Y(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

On rappelle également le développement asymptotique suivant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

avec γ la constante d'Euler.

Théorème 1 (Slutsky) *Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. Si Y_n converge en loi vers Y et Z_n converge en probabilité vers une constante z, alors (Y_n, Z_n) converge en loi vers (Y, z).*

Rappelons enfin qu'un processus stochastique à valeurs réelles $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, intégrable et $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ p.s. De même, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, intégrable et $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant M_n$ p.s.

Lemme 1 (Doob) *Une sur-martingale minorée converge presque sûrement.*

Si on considère $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable, i.e. $\mathbb{E}[M_n^2] < +\infty$ pour tout $n \geqslant 0$, on appelle crochet de la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $(\langle M\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le processus défini par $\langle M\rangle_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}].$$

Théorème 2 (TLC pour les martingales) *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, strictement positive, déterministe croissant vers l'infini. On suppose que*

1. *il existe $\lambda \geqslant 0$ déterministe tel que $a_n^{-1}\langle M\rangle_n$ converge en probabilité vers λ,*
2. *il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\frac{1}{(a_n)^{1+\frac{\delta}{2}}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(M_k - M_{k-1})^{2+\delta} | \mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Alors on a

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}} M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda).$$

1 Estimation à l'aide des statistiques d'ordre

On note $(X_{(1,n)}, ..., X_{(n,n)})$ le réarrangement croissant de $(X_1, ..., X_n)$, c'est à dire que l'on a $X_{(1,n)} \leqslant ... \leqslant X_{(n,n)}$ et il existe une permutation aléatoire de $\{1, ..., n\}$, notée σ_n, telle que $(X_{(1,n)}, ..., X_{(n,n)}) = (X_{\sigma_n(1)}, ..., X_{\sigma_n(n)})$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $S_n(x) := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \leqslant x}$. Enfin, on note $(k(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1 \leqslant k(n) \leqslant n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{k(n)}{n} = p$.

1. (a) Exprimer les évènements aléatoires $\{X_{(k(n),n)} \leqslant x\}$ et $\{X_{(k(n),n)} > x\}$ à l'aide de $S_n(x)$.

   (b) Montrer que

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(x)}{k(n)} = \frac{F(x)}{p} \quad \text{p.s.}$$

   (c) En déduire que

   $$\lim_{n\to+\infty} X_{(\lfloor np\rfloor+1,n)} = \theta_p \quad \text{p.s.}$$

   À défaut d'une convergence presque sûre, une convergence en probabilité sera appréciée.

2. En reprenant les raisonnements de la question 1), montrer que

   $$\lim_{n\to+\infty} X_{(n,n)} = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) = 1\} \text{ p.s.} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} X_{(1,n)} = \sup\{x \in \mathbb{R}; F(x) = 0\} \text{ p.s.}$$

   On pourra distinguer selon que $\inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) = 1\}$ est fini ou non.

3. On suppose dans cette question que la loi des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à densité, de fonction densité notée f, que f est continue en θ_p et que $f(\theta_p) > 0$. On suppose de plus que $k(n)$ vérifie le développement asymptotique suivant :

   $$k(n) = np + o(\sqrt{n}).$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $y_n = \theta_p + \frac{x}{\sqrt{n}}$ et $p_n = F(y_n)$. Montrer que

$$p_n - p = \frac{x}{\sqrt{n}} f(\theta_p) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(b) Montrer que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ on a

$$\left\{\sqrt{n}(X_{(k,n)} - \theta_p) \leqslant x\right\} = \left\{V_n \geqslant \sqrt{n}\left(\frac{k}{n} - p_n\right)\right\}$$

avec $V_n := \sqrt{n}\left(\frac{S_n(y_n)}{n} - p_n\right)$.

(c) Calculer la fonction caractéristique de V_n et montrer que

$$V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} V,$$

avec $V \sim \mathcal{N}(0, p(1-p))$.

(d) En déduire que $\sqrt{n}(X_{(\lfloor np \rfloor + 1, n)} - \theta_p)$ converge en loi lorsque $n \to +\infty$ et donner sa limite.

4. Pour $\alpha \in]0, 1[$, on note a_α le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $i_n = 1 \vee \lfloor np - \sqrt{n} a_\alpha \sqrt{p(1-p)} \rfloor$ et $j_n = n \wedge \lfloor np + \sqrt{n} a_\alpha \sqrt{p(1-p)} \rfloor$. Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on a

$$\mathbb{P}(\theta_p = X_{(i,n)}) = 0$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\theta_p \in [X_{(i_n,n)}, X_{(j_n,n)}]\right) = 1 - \alpha.$$

5. On s'intéresse dans cette question aux cas $p = 0$ et $p = 1$.

(a) Calculer les fonctions de répartition de $X_{(1,n)}$ et $X_{(n,n)}$ en fonction de F.

(b) On suppose dans cette question que les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suivent une loi exponentielle de paramètre 1, dont la densité est donnée par

$$f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{x > 0}.$$

Trouver $\beta > 0$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tels que $\left(n^\beta X_{(1,n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(X_{(n,n)} - b_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent en loi, lorsque $n \to +\infty$, vers des variables aléatoires à densité.

2 Estimation à l'aide d'un algorithme stochastique

On définit une suite de variables aléatoires réelles $(\hat{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $\hat{\theta}_0 = 0$ et $\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n - \gamma_n \left(\mathbb{1}_{X_{n+1} \leqslant \hat{\theta}_n} - p\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n^2 < +\infty.$$

Le but de cette partie est de montrer que $\hat{\theta}_n$ tend vers θ_p presque sûrement. Dans toute la suite on pose $T_n := \hat{\theta}_n - \theta_p$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{E}[|T_{n+1}|^2 | \mathcal{F}_n] = |T_n|^2 - 2\gamma_n T_n (F(\hat{\theta}_n) - p) + \gamma_n^2 \mathbb{E}[|\mathbb{1}_{X_{n+1} \leqslant \hat{\theta}_n} - p|^2 | \mathcal{F}_n].$$

2. (a) Montrer que le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$Z_n := |T_n|^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^2 \mathbb{E}\left[|\mathbb{1}_{X_{k+1}\leqslant \hat\theta_k} - p|^2 | \mathcal{F}_k\right]$$

est une sur-martingale.

(b) Montrer que $(|T_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement.

3. (a) Prouver que la série de terme général $\gamma_k T_k (F(\hat\theta_k) - p)$ est presque-sûrement convergente.

(b) En utilisant le résultat précédent montrer que pour tout $\delta > 0$ on a

$$\mathbb{P}(\delta < \lim_{n\to+\infty} |T_n| < 1/\delta) = 0.$$

(c) Montrer que $(\hat\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers θ_p.

4. On s'intéresse dans cette question au cas $p = 1$. On pose $x_F := \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) = 1\}$ et on suppose que $x_F > 0$ et $\sup\{x \in \mathbb{R}; F(x) = 0\} < 0$.

(a) Pour tout $K \in \mathbb{R}^+$, on introduit la variable aléatoire $U^K = \inf\{n \in \mathbb{N}^*; \hat\theta_n > K\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}[\hat\theta_{(n+1)\wedge U^K}] \geqslant \mathbb{E}[\hat\theta_{n\wedge U^K}] + \gamma_n (1 - F(K)) \mathbb{P}(U^K > n).$$

(b) Si $K < x_F$, montrer que U^K est fini presque sûrement.

(c) Si $x_F = +\infty$, montrer que $(\hat\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.

(d) Si $x_F < +\infty$, montrer que $(\hat\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $\hat\theta_\infty$ bornée, donner des bornes explicites et montrer que $\mathbb{P}(\hat\theta_\infty \neq x_F) > 0$.

3 Vitesse de convergence de l'algorithme stochastique

On suppose dans cette partie que F est de classe C^2 et que $2f(\theta_p) - 1 > 0$. On considère à nouveau la suite $(\hat\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ introduite dans la partie précédente pour laquelle on prend $\gamma_n = 1/(n + n_0)$ avec n_0 une constante fixée qui vérifie $2f(\theta_p) < n_0$. On a montré dans la partie 2 que $\hat\theta_n$ converge presque sûrement vers θ_p, le but de cette partie est de montrer la convergence suivante :

$$\sqrt{n}\left(\hat\theta_n - \theta_p\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{2f(\theta_p) - 1}\right). \tag{1}$$

On pose $Y_n := \mathbb{1}_{X_n \leqslant \hat\theta_{n-1}} - F(\hat\theta_{n-1})$, $\tau := f(\theta_p)$, $\delta_n := F(\hat\theta_n) - p - \tau(\hat\theta_n - \theta_p)$, $\alpha_n := 1 - \frac{\tau}{n+n_0}$, $\beta_n := \prod_{i=0}^n \alpha_i$ et $T_n := \hat\theta_n - \theta_p$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n peut se réécrire

$$T_n = \beta_{n-1} T_0 - \beta_{n-1} M_n - \beta_{n-1} R_{n-1}$$

avec

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(k+n_0)\beta_k}\right) Y_{k+1} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{(k+n_0)\beta_k}\right) \delta_k.$$

2. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et calculer son crochet.

3. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\lim_{n\to+\infty} n^\tau \beta_n = c$.

4. (a) Pour tout réel $r < 1$, donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^{-r}$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) Montrer que l'on a, lorsque n tend vers l'infini,

$$\langle M\rangle_n \sim \frac{p(1-p)}{c^2(2\tau-1)}n^{2\tau-1}.$$

(c) Montrer qu'il existe $\delta>0$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{(k+n_0)\beta_k}Y_{k+1}\right|^{2+\delta}\middle|\mathcal{F}_k\right] = O(n^{2\tau-1-\delta(1-\tau)}).$$

(d) En déduire que l'on a

$$\sqrt{n}\beta_{n-1}M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\frac{p(1-p)}{2\tau-1}\right).$$

5. Pour $j\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon>0$ on pose $U^{j,\varepsilon}=\inf\{n\geqslant j; |T_n|>\varepsilon\}$.
   (a) Montrer que pour ε suffisamment petit (indépendamment de j) et $n\geqslant j$ on a

   $$\mathbb{E}\left[|T_{n+1}|^2\mathbb{1}_{U^{j,\varepsilon}>n}\middle|\mathcal{F}_n\right] \leqslant \left(|T_n|^2\left(1-\frac{2f(\theta_p)-\eta}{n+n_0}\right)+\frac{1}{(n+n_0)^2}\right)\mathbb{1}_{U^{j,\varepsilon}>n},$$

   avec $0<\eta<2f(\theta_p)-1$. ε est maintenant fixé jusqu'à la fin de la partie de telle sorte que l'inégalité précédente est vraie pour tout $j\in\mathbb{N}$ et tout $n\geqslant j$.

   (b) En déduire qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a

   $$\mathbb{E}\left[|T_n|^2\mathbb{1}_{U^{j,\varepsilon}>n}\right]\leqslant\frac{C}{n}.$$

   Indication : on pourra introduire les quantités $\tilde{\alpha}_n := 1-\frac{2\tau-\eta}{n+n_0}$ et $\tilde{\beta}_n := \prod_{i=j}^{n}\tilde{\alpha}_i$.

   (c) Montrer que

   $$\lim_{n\to+\infty} n^{1/2-\tau}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1-\tau}}|T_k|^2\mathbb{1}_{U^{j,\varepsilon}=+\infty}\right]=0.$$

   (d) En déduire que $n^{1/2-\tau}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^{1-\tau}}\right)\delta_k$ puis que $\sqrt{n}\beta_{n-1}R_{n-1}$ tendent vers 0 en probabilité lorsque n tend vers l'infini.

6. Montrer que le résultat (1) est vrai.

7. On suppose que l'on cherche à estimer θ_p à partir d'une très grande quantité de données (i.e. n très grand), ou bien que l'on a pas accès à toutes les données initialement et que de nouvelles données arrivent régulièrement. Dans ce cas, quel est l'intérêt de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ par rapport à $X_{(\lfloor np\rfloor+1,n)}$?

Sujet 2 - Analyse numérique

Introduction, notations

Ce sujet contient 7 pages. Les parties de ce sujet sont indépendantes. Aucune connaissance spécifique sur l'équation de transport (1a)-(1b) **n'est nécessaire pour traiter ce sujet.**

Dans ce sujet, on construit et on étudie plusieurs méthodes numériques pour approcher la solution de l'équation de transport 1-dimensionnelle à vitesse constante $V > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + V\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1a) \\ u(0,x) = u^0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1b) \end{cases}$$

La donnée initiale u^0 est une fonction dont la régularité sera précisée dans chaque partie. Dans tout le sujet on appelle « la solution exacte du système (1a)-(1b) » la fonction $u(t,x) = u^0(x - Vt)$.

On introduit un pas de temps $\Delta t > 0$ et un pas d'espace $\Delta x > 0$. On supposera toujours que le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ est fixé, on note cette quantité λ, de sorte que quand on dit « quand Δx tend vers 0 » il est sous-entendu que Δt tend également vers 0 de sorte à garder le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ constant égal à λ. On fixe de plus le temps final T et on suppose qu'il existe un entier N tel que $T = N\Delta t$. Notez que N tend vers $+\infty$ quand Δx (et donc Δt) tend vers 0. Enfin, on note $x_j = j\Delta x$ pour $j \in \mathbb{Z}$ et $t^n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$. Enfin, les schémas numériques seront initialisés soit par

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^0 = u^0(x_j) \tag{2}$$

soit par

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} u^0(x)dx. \tag{3}$$

Les notations suivantes sont adoptées dans l'énoncé.

— $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs $[0, +\infty[$, $\mathbb{R}^+_*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs $]0, +\infty[$.

— La partie entière d'un réel x est notée $\mathbb{E}(x)$: étant donné $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}(x) = n$ si $x \in [n, n+1[$.

— $\ell^\infty = \{(w_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^\mathbb{Z}$ telles que $\sup_{j\in\mathbb{Z}} |w_j| < +\infty\}$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées (indexées sur $\mathbb{Z}$), muni de la norme $||(w_j)_{j\in\mathbb{Z}}||_{\ell^\infty} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |w_j|$.

— $\ell^1 = \{(w_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^\mathbb{Z}$ telles que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |w_j| < +\infty\}$ l'espace vectoriel des suites réelles sommables (indexées sur $\mathbb{Z}$), muni de la norme $||(w_j)_{j\in\mathbb{Z}}||_{\ell^1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |w_j|$.

— Pour $p \geq 1$, pour $w \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ une fonction, on note $w^{(p)}$ la dérivée p-ième de w ; pour $p = 0$ on note $w^{(0)} = w$.

— Pour E un ensemble, $f : E \to E$ et $k \geq 1$ un entier, f^k désigne la composée $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ où il y a k composées.

— On rappelle qu'une fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite à support compact s'il existe un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en dehors duquel w est nulle. Pour $p \geq 0$ un entier, on note

$$\mathcal{C}_c^p = \Big\{ \begin{array}{l} w \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \text{ pour lequelles} \\ \text{il existe } \ (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ a < b, \ \text{ tels que} \\ \forall t \geq 0, \ \forall x \in]-\infty, a + Vt[\cup]b + Vt, +\infty[, \ w(t, x) = 0. \end{array} \Big\}$$

1 Généralités sur l'équation de transport

Dans cette partie on suppose que $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact.

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par

$$u(t, x) = u^0(x - Vt) \tag{4}$$

est solution de l'équation de transport (1a)-(1b) et qu'elle appartient à $\mathcal{C}_c^1$.

2. Supposons que u^0 est de plus classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$. Montrer que u est bornée, appartient à $\mathcal{C}_c^p$ et que ses dérivées partielles $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ et $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ $(1 \leq k \leq p)$ sont toutes bornées.

3. Soit u une fonction de $\mathcal{C}_c^1$ vérifiant (1a). Montrer que u^2 est aussi solution de (1a).

4. Soient u_1 et u_2 deux fonctions de $\mathcal{C}_c^1$, solutions de (1a). Montrer que

$$\forall \epsilon \in]0, T[, \quad \int_{\mathbb{R}} (u_1 - u_2)^2(T, x)dx = \int_{\mathbb{R}} (u_1 - u_2)^2(\epsilon, x)dx,$$

puis que ce résultat est aussi valable pour $\epsilon = 0$.

5. Montrer que la fonction définie par (4) est l'unique solution de (1a)-(1b) dans l'ensemble de fonctions $\mathcal{C}_c^1$.

2 Schéma décentré à gauche

Le schéma décentré à gauche est défini par la donnée de $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$, et par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} V(u_j^n - u_{j-1}^n). \tag{5}$$

On rappelle que $\Delta t = \lambda \Delta x$ où $\lambda > 0$ est fixé, que V est strictement positif, et que le temps final $T > 0$ est fixé de sorte que $T = N \Delta t$ pour un certain entier N.

2.1 Donnée initiale régulière

Dans cette question on suppose que la donnée initiale $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact et que la solution exacte $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{C}^2_c$. Le schéma est initialisé par (2).

1.

1a) Montrer l'existence d'un entier M_0 tel que $|u^0_j| = 0$ si $|j| \geq M_0$.

1b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|u^n_j| = 0$ si $|j| \geq M_0 + n$.

1c) Justifier que pour tout $n \geq 0$, la quantité $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u^n_j$ est bien définie.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u^{n+1}_j = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u^n_j$.

3.

3a) Soit u la solution exacte de (1a). Soit la suite $\epsilon^n = (\epsilon^n_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ dont le terme général est défini, pour tout (j, n) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, par

$$\epsilon^n_j = u(t^{n+1}, x_j) - \left(u(t^n, x_j) - \frac{\Delta t}{\Delta x} V\big(u(t^n, x_j) - u(t^n, x_{j-1})\big) \right).$$

Montrer que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $s^n_j \in [t^n, t^{n+1}]$ et $y^n_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tels que

$$\epsilon^n_j = \frac{1}{2}\Delta t^2 \,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s^n_j, x_j) - \frac{V}{2}\Delta x \Delta t\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, y^n_j).$$

3b) En déduire qu'il existe une constante C_∞ ne dépendant que de u, de λ et de V telle que

$$\max_{0\leq n\leq N} \sup_{j\in\mathbb{Z}} |\epsilon^n_j| \leq C_\infty \Delta x \Delta t.$$

4.

4a) Soit μ un réel. Montrer que l'application linéaire

$$Q_\mu : \begin{array}{ccc} \ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty \\ (w_j)_{j\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \big((1-\mu)w_j + \mu w_{j-1}\big)_{j\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

est continue de norme 1 si et seulement si $0 \leq \mu \leq 1$.

4b) Montrer que pour tout n positif, $(u^{n+1}_j)_{j\in\mathbb{Z}} = Q_{\lambda V}\big((u^n_j)_{j\in\mathbb{Z}}\big)$.

5.

5a) Pour $n \geq 0$, on considère la suite $e^n = (e^n_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, où $e^n_j = u(t^n, x_j) - u^n_j$. Montrer que pour tout n positif,

$$e^{n+1} = Q_{\lambda V}(e^n) + \epsilon^n.$$

5b) Que vaut e^0 ? En déduire que pour tout n positif, $e^n = \sum_{k=0}^{n-1} Q^k_{\lambda V}(\epsilon^{n-k})$.

6. Dans cette question on suppose que $\lambda V \leq 1$.

6a) Montrer que

$$\max_{0\leq n\leq N} \sup_{j\in\mathbb{Z}} |e^n_j| \leq C_\infty T \Delta x.$$

6b) On admet qu'il existe $C_1 > 0$ telle que

$$\max_{0\le n\le N} \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n - u(t^n, x_j)| \le C_1 T \Delta x.$$

Pour $1 < p < +\infty$, montrer qu'il existe une constante C_p telle que

$$\left(\max_{0\le n\le N} \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n - u(t^n, x_j)|^p\right)^{1/p} \le C_p T \Delta x.$$

2.2 Donnée initiale discontinue

Cette section est indépendante des autres. On y suppose que $\lambda V < 1$.

1. Montrer par récurrence, sans hypothèse sur u^0, que

$$u_j^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-\lambda V)^{n-k} (\lambda V)^k u_{j-k}^0. \tag{6}$$

2. On prend maintenant $u^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$ et on initialise le schéma avec (2) de sorte que $u_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } j < 0, \\ 1 & \text{si } j \ge 0. \end{cases}$

2a) Montrer que $u_j^n = 0$ si $j < 0$ et que $u_j^n = 1$ si $j > n$.

2b) Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}, k\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre de succès λV. Montrer que pour tout $n \ge 1$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$u_j^n = P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \le j\right) \quad \text{où } P \text{ désigne la probabilité.}$$

2c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x = \lim_{N\to+\infty} x_{j(N)}$, où $j(N) = \mathbb{E}(x/\Delta x)$.

2d) On définit la fonction

$$u_{\Delta x}(t, x) = u_j^n \ \text{ si } \ x \in [j\Delta x, (j+1)\Delta x[\ \text{ et } \ t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t[\,.$$

En appliquant la loi des grands nombres, montrer que

$$u_{\Delta x}(T, x) \underset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x < VT, \\ 1 & \text{si } x > VT. \end{cases}$$

3 Schémas d'ordre élevé

Soient $p > 0$ et $k \geq 0$ deux entiers, on considère le schéma numérique à $k+p+1$ points

$$\forall n \geq 0,\ \forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^{n+1} = \sum_{\ell=-p}^{k} a_\ell u_{j+\ell}^n, \tag{7}$$

où les a_ℓ, $-p \leq \ell \leq k$ sont des réels fixés. On définit *l'erreur de consistance locale* associée au schéma (7) comme la quantité

$$\epsilon_j^n = u(t^{n+1}, x_j) - \sum_{\ell=-p}^{k} a_\ell u(t^n, x_{j+\ell}).$$

3.1 Obstruction de Godunov

Dans cette partie, u^0 et u sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées. Le schéma est initialisé avec (2). On considère un schéma de la forme (7) tel que

$$\sum_{\ell=-p}^{k} a_\ell = 1 \quad \text{et tel que} \quad \forall \ell,\ a_\ell \geq 0. \tag{8}$$

1. Montrer que sous l'hypothèse (8), le schéma (7) vérifie :

$$\forall n \geq 0, \quad ||(u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}||_{\ell^\infty} \leq ||(u_j^0)_{j\in\mathbb{Z}}||_{\ell^\infty} \tag{9}$$

2. Effectuer un développement limité au point (t^n, x_j) de ϵ_j^n avec un reste en $O(\Delta t^3) + O(\Delta x^3)$.

3. Soit u la solution exacte de l'équation de transport (1a). Montrer que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).$$

4. Montrer que si

$$\sum_{\ell=-p}^{k} a_\ell = 1, \quad \sum_{\ell=-p}^{k} \ell a_\ell = -\lambda V, \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=-p}^{k} \ell^2 a_\ell = (\lambda V)^2, \tag{10}$$

alors $\epsilon_j^n = O(\Delta x^3) + O(\Delta t^3)$.

5. Montrer que sous l'hypothèse (8),

$$\left(\sum_{\ell=-p}^{k} \ell a_\ell\right)^2 \leq \left(\sum_{\ell=-p}^{k} \ell^2 a_\ell\right)\left(\sum_{\ell=-p}^{k} a_\ell\right),$$

avec égalité si et seulement si les deux vecteurs suivants sont colinéaires

$$(\sqrt{a_{-p}}, \sqrt{a_{-p+1}}, \cdots, \sqrt{a_k}) \quad \text{et} \quad (-p\sqrt{a_{-p}}, (-p+1)\sqrt{a_{-p+1}}, \cdots, k\sqrt{a_k}).$$

6. Montrer qu'il n'existe aucun schéma de la forme (7), ayant deux coefficients non nuls ou plus et vérifiant à la fois les conditions (8) et (10).

3.2 Ordre de convergence pour u^0 peu régulière

Soit

$$\mathcal{S} : \begin{array}{ccc} \ell^1 & \longrightarrow & \ell^1 \\ (w_j)_{j\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \mathcal{S}\big((w_j)_{j\in\mathbb{Z}}\big) \end{array}$$

une application linéaire telle que :

— $\mathcal{S}$ est A-stable : il existe $A > 0$ tel que

$$\forall k \geq 1, \quad \forall (w_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^1, \quad ||\mathcal{S}^k\big((w_j)_{j\in\mathbb{Z}}\big)||_{\ell_1} \leq A||(w_j)_{j\in\mathbb{Z}}||_{\ell_1};$$

— le schéma associé à $\mathcal{S}$ est d'ordre p, $p \geq 2$: il existe une constante C_p telle que pour tout $u^0 \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, le schéma défini par

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ u_j^0 = u^0(x_j) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (u_j^{n+1})_{j\in\mathbb{Z}} = \mathcal{S}\big((u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}\big)$$

vérifie (on rappelle que $t^n = n\Delta t$ et qu'en particulier $t^N = T$)

$$\Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^N - u(t^N, x_j)| \leq C_p||(u^0)^{(p+1)}||_{L^1}\Delta x^p T.$$

1. Soit φ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, positive, nulle en dehors de $[0,1]$ et d'intégrale 1. Pour w une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ telle que w' appartienne à $L^1(\mathbb{R})$, pour tout ϵ strictement positif, on définit la fonction w_ϵ comme

$$w_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) w(y)dy. \tag{11}$$

1a) Montrer que

$$||w_\epsilon||_{L^\infty} \leq ||w||_{L^\infty} \quad \text{et que} \quad ||w_\epsilon - w||_{L^1} \leq \epsilon||w'||_{L^1}.$$

1b) Montrer que w_ϵ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que pour tout entier $r \geq 1$, il existe une constante C_r indépendante de w telle que

$$||w_\epsilon^{(r)}||_{L^1} \leq \frac{C_r}{\epsilon^{r-1}}||w'||_{L^1}.$$

2. On suppose désormais que u^0 est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et que u_0' est dans $L^1(\mathbb{R})$. On note $u(t,x) = u^0(x - Vt)$ la solution exacte de l'équation de transport pour la donnée initiale u^0. On note de même $u_\epsilon(t,x) = u_\epsilon^0(x - Vt)$ la solution exacte de l'équation de transport pour la donnée initiale u_ϵ^0 (définie par (11) avec $w = u^0$). Soit $(u_j^n)_{n\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}$ la réalisation du schéma numérique pour la donnée initiale u^0 :

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ u_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j+\Delta x/2} u^0(x)dx \text{ et } \forall n \geq 0,\ (u_j^{n+1})_{j\in\mathbb{Z}} = \mathcal{S}\big((u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}\big)$$

et soit $(v_j^n)_{n\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}$ la réalisation du schéma numérique pour la donnée initiale u_ϵ^0 :

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ v_j^0 = u_\epsilon^0(x_j) \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0,\ (v_j^{n+1})_{j\in\mathbb{Z}} = \mathcal{S}\big((v_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}\big).$$

$2a)$ Montrer l'existence d'une constante B_1 telle que

$$\Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |v_j^N - u_\epsilon(t^N, x_j)| \leq B_1 \frac{\Delta x^p}{\epsilon^p} ||(u^0)'||_{L^1} T.$$

$2b)$ Montrer l'existence d'une constante $\tilde{B}_2$ telle que

$$\Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |v_j^0 - u_j^0| \leq \tilde{B}_2(\epsilon + \Delta x)||(u^0)'||_{L^1}.$$

$2c)$ En déduire l'existence d'une constante B_2 telle que

$$\Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |v_j^N - u_j^N| \leq B_2(\epsilon + \Delta x)||(u^0)'||_{L^1}.$$

$2d)$ On admet qu'il existe une constante B telle que

$$\Delta x \sum_j \left| u_j^N - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j+\Delta x/2} u(t^N, x)dx \right| \leq B||(u_0)'||_{L^1} \left(\epsilon + \frac{\Delta x^p T}{\epsilon^p} + \Delta x \right).$$

En optimisant le choix de ϵ, montrer qu'il existe une constante B_p dépendant de p et de B telle que

$$\Delta x \sum_j \left| u_j^N - \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j+\Delta x/2} u(t^N, x)dx \right| \leq B_p||(u_0)'||_{L^1} \left(\Delta x^{\frac{p}{p+1}} T^{\frac{1}{p+1}} + \Delta x \right).$$

FIN DU SUJET 2