2C8121

Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay
Ecole Normale Supérieure de Rennes

SECOND CONCOURS – ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2018

Épreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Épreuve de Mathématiques Générales

Dans ce problème on s'intéresse au comptage de points « entiers » (points d'un réseau) d'un espace euclidien. Dans la partie II, on traite un exemple dans $\mathbb{R}^2$. Dans la partie IV, on considère le cas général et on démontre la modularité de la fonction thêta associée au réseau, qui est une fonction génératrice pour ce comptage – cette propriété permettant de calculer facilement cette série génératrice.

La partie II repose sur des résultats de la partie I, la partie IV repose sur les résultats de la partie III, mais dans tout le problème on pourra traiter les questions de façon indépendante en admettant les résultats des questions précédentes.

Des indications sont parfois suggérées en fin de question, on conseille de lire celles-ci jusqu'au bout. Il n'est pas obligatoire d'utiliser ces suggestions pour répondre aux questions.

Notations et rappels.

On rappelle ici quelques notations classiques utilisées dans l'énoncé ainsi que quelques résultats utiles qu'on pourra utiliser librement. D'autres notations et résultats plus spécifiques seront introduits au fur et à mesure dans l'énoncé (en italique).

- Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $z \in \mathbb{C}$ on note $a^z := \exp(z \ln(a))$, où ln est la détermination principale du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
- Pour $T > 0$ on rappelle que l'espace $L^2([0, T])$ muni du produit hermitien

$$(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\overline{g(x)}dx$$

  est un espace de Hilbert et que les coefficients de Fourier $c_n(f) = (f, e_n)$ d'une fonction $f \in L^2([0, T])$, où $e_n(x) = \exp(in\frac{2\pi}{T}x)$, satisfont l'égalité de Parseval

$$(f, f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 .$$

- Pour deux fonctions réelles f et g on note

$$f(x) = O(g(x)) \text{ quand } x \to +\infty$$

  s'il existe des constantes N et $C > 0$ telles que

$$\forall x > N, \quad |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

- Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{pgcd}(a, b)$ le plus grand diviseur positif commun à a et b. Par convention $\mathrm{pgcd}(0, b) = \mathrm{pgcd}(b, 0) = b$. On rappelle l'égalité de Bézout :

$$\exists\, x, y \in \mathbb{Z},\ ax + by = \mathrm{pgcd}(a, b).$$

I. Préliminaires

Produits infinis.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On dit que le produit infini $\prod_{n\geq 1} a_n$ converge s'il existe $P \in \mathbb{C}$ tel que la suite des produits partiels $P_N = \prod_{n=1}^N a_n$ converge vers P quand N tend vers l'infini. On dit que la convergence est stricte si $P \neq 0$.

I.1. Montrer que si les a_n sont réels positifs, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (i) le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ converge strictement
- (ii) la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$ converge
- (iii) la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

Soient E un espace topologique de dimension finie, K un compact de E et $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions, avec $g_n : E \to \mathbb{C}$. On dit que le produit infini $\prod_{n\geq 1} g_n$ converge normalement sur K si la suite de fonctions $P_N = \prod_{n=1}^N g_n$ converge normalement sur K. On dit que la convergence est stricte si la limite P vérifie $\forall x \in K,\ P(x) \neq 0$.

I.2. Soit $f_n : E \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions telle que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout compact de E.
- (a) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+f_n)$ converge normalement sur tout compact de E. (On pourra montrer que $P_{N+1} - P_N$ converge normalement sur tout compact de E, avec $g_n = 1 + f_n$).
- (b) Montrer que la convergence est stricte si $\forall n \geq 1,\ \forall x \in E,\ f_n(x) \neq -1$. On pourra pour cela étudier la convergence du produit $\prod_{n\geq 1} \dfrac{1}{1+f_n}$.

Fonction zeta de Riemann

I.3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^z$ est normalement convergente sur tout compact du domaine

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}.$$

Dans la suite, pour $z \in D$, on notera la somme de la série

$$\zeta(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}.$$

I.4. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- (a) Montrer que le produit infini

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)$$

converge normalement sur tout compact de D.
- (b) Calculer

$$\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\leq N}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

en fonction de $\mathcal{E}(N)$, l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs premiers sont inférieurs ou égaux à N (on pourra utiliser le développement en série de $1/(1-x)$).

(c) Montrer l'identité d'Euler pour $z \in D$:

$$\zeta(z) = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^z} \right) \right)^{-1} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{1 - p^{-z}} \right).$$

En déduire que ζ ne s'annule pas sur le domaine D.

I.5. En décomposant en série de Fourier une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique définie par $f(x) = x$ sur $[0, T[$, montrer que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

II. Problème du cercle de Gauss

On s'intéresse dans cette section au cas du dénombrement des points du réseau $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, muni de la norme euclidienne $\|(x, y)\| = x^2 + y^2$. On pose

$$N(R) = \mathrm{Card}\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \|(a, b)\| \leq R\}.$$

II.1. À l'aide d'un dessin, montrer que

$$N(R) = \pi R^2 + O(R) \quad \text{quand } R \to +\infty.$$

On s'intéresse maintenant au comptage des points primitifs, c'est-à-dire à coordonnées premières entre elles. On note

$$N_{prim}(R) = \mathrm{Card}\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \mathrm{pgcd}(a, b) = 1 \ \textit{et} \ \|(a, b)\| \leq R\}.$$

Le but des questions suivantes est de montrer le résultat :

$$N_{prim}(R) = \frac{1}{\zeta(2)} \pi R^2 + O(R \ln(R)) \quad \textit{quand } R \to +\infty. \tag{3}$$

II.2. En notant

$$N^+(R) = \mathrm{Card}\{(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid \|(a, b)\| \leq R\},$$
$$N^+_{prim}(R) = \mathrm{Card}\{(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid \mathrm{pgcd}(a, b) = 1 \text{ et } \|(a, b)\| \leq R\},$$

montrer que

$$N(R) = 4N^+(R) + O(R) \quad \text{quand } R \to +\infty$$
$$\text{et } N_{prim}(R) = 4N^+_{prim}(R) + O(R) \quad \text{quand } R \to +\infty.$$

On définit

$$\mu(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ \mathrm{pgcd}(k,n)=1}}^{n} \xi_k,$$

où $\xi_k = e^{2i\pi k/n}$ *sont les racines* n*-ièmes de l'unité. Les* ξ_k *avec* $\mathrm{pgcd}(k,n) = 1$ *sont appelées racines primitives* n*-ièmes de l'unité.*

II.3. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ puis montrer que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n > 1 \end{cases} .$$

On pourra pour cela montrer que chaque ξ_k est une racine d-ième primitive de l'unité pour exactement un diviseur d de n.

En déduire que, pour $a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{d|a,\ d|b} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathrm{pgcd}(a,b) = 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On admettra dans la suite que μ *est multiplicative, c'est-à-dire que si* $\mathrm{pgcd}(n,m) = 1$*, alors* $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$*.*

II.4. Pour un entier $n > 1$, soit $n = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$ l'unique décomposition de n en facteurs premiers (les p_i sont premiers, donc différents de 1, $\forall i \neq j,\ p_i \neq p_j$ et $\forall i,\ s_i \neq 0$). Montrer que pour $n > 1$,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall i, s_i = 1 \text{ et } k \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } \forall i, s_i = 1 \text{ et } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

II.5. A l'aide de l'identité d'Euler (question I.4.c), montrer que pour tout entier $s \geq 2$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

II.6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que

$$\sum_{\substack{(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ a^2+b^2 \leq n^2}} \sum_{d|a,d|b} \mu(d) = \frac{1}{4}\pi n^2 \sum_{1 \leq d \leq n} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(n \ln(n)),$$

et conclure en montrant le résultat (3). On pourra montrer préalablement que

$$\sum_{\substack{(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ a^2+b^2 \leq n^2}} \sum_{d|a,d|b} \mu(d) = \sum_{1 \leq d \leq n} \mu(d) \sum_{\substack{(k,l) \in (N^*)^2 \\ k^2+l^2 \leq (n/d)^2}} 1.$$

III. Formule sommatoire de Poisson

On note $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^d$. *Pour* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *intégrable, on définit sa transformée de Fourier par*

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

où $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ *est le produit scalaire euclidien sur* $\mathbb{R}^d$ *et* $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_d$.

III.1. Calculer la transformée de Fourier de $f(\mathbf{x}) = e^{-\pi\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$. On pourra chercher une équation différentielle vérifiée par $\hat{f}$ dans le cas $d = 1$. On admettra que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$.

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *et pour deux multi-indices* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ *et* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ *de* $\mathbb{N}^d$, *on définit la semi-norme* $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ *par*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \|g_\alpha D^\beta f\|_\infty$$

où g_α *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}^d$ *par* $g_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_d^{\alpha_d}$ *et* $D^\beta f = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_d}}{\partial x_d^{\beta_d}} f$, *et on définit l'espace de Schwartz :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^d)^2,\ \|f\|_{\alpha,\beta} < +\infty\}.$$

III.2. Vérifier que la fonction $f(\mathbf{x}) = e^{-\pi\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Enfin, pour une fonction f $\mathbb{Z}^d$*-périodique, c'est-à-dire vérifiant*

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ f(\mathbf{x} + \mathbf{n}) = f(\mathbf{x}),$$

et dans $L^1([0,1]^d)$, *on définit ses coefficients de Fourier par*

$$c_{\mathbf{n}}(f) = \int_{[0,1]^d} e^{-2i\pi\langle \mathbf{n},\mathbf{x}\rangle} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \text{pour } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d.$$

On admettra le théorème de convergence de Dirichlet suivant :

$$\textit{Si } f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d),\ \textit{alors}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}}(f) e^{2i\pi\langle \mathbf{n},\mathbf{x}\rangle}, \tag{4}$$

où la série converge simplement.
Le but des questions suivantes est de montrer le résultat :

$$\textit{Si}\ \ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \textit{alors}\ \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} f(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(\mathbf{n}). \tag{5}$$

III.3. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ on pose $F(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} f(\mathbf{x} + \mathbf{n})$.

(a) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}^d$, de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{Z}^d$-périodique.

(b) Montrer que $c_{\mathbf{n}}(F) = \hat{f}(\mathbf{n})$.

(c) Prouver le résultat (5).

On cherche maintenant à étendre ce résultat pour des réseaux. Un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^d$ pour l'addition, discret (pour tout $R > 0$ il n'existe qu'un nombre fini de points à distance euclidienne inférieure à R de l'origine), tel que le sous-espace vectoriel réel engendré par Λ est égal à $\mathbb{R}^d$. On admettra la caractérisation suivante : Λ est un réseau de $\mathbb{R}^d$ si et seulement si il existe une base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_d.$$

On définit Λ' le réseau dual de Λ comme

$$\Lambda' = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \mid \forall \mathbf{x} \in \Lambda,\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{Z}\}. \tag{6}$$

III.4. Soit Λ un réseau de base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d)$. Expliciter une base $(\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_d^*)$ de Λ' (on pourra donner la matrice des vecteurs $\mathbf{e}_i^*$ dans la base canonique en terme de celle pour les vecteurs $\mathbf{e}_i$ dans la base canonique). En déduire que $\Lambda'' = \Lambda$.

III.5. Vérifier que les ensembles suivants sont des réseaux et calculer leur dual :

(a) $\mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_2 \subset \mathbb{R}^2$, avec $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ et $\mathbf{e}_2 = (0, 2)$.

(b) $\Lambda_8 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^8 \mid \sum x_i \equiv 0 \mod 2\} + \mathbb{Z}\mathbf{e} \subset \mathbb{R}^8$, avec $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(1, 1, \ldots, 1)$.

III.6. Soit Λ un réseau de base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d)$. On définit le covolume de Λ comme

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d/\Lambda) := |\det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)|.$$

On pose

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d. \\ \sum_i x_i \mathbf{e}_i & \mapsto & (x_1, \ldots, x_d) \end{array}$$

Déduire des questions précédentes la formule de sommation suivante :

$$\textit{Si } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \textit{ alors } \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d/\Lambda)} \sum_{\mathbf{y} \in \Lambda'} \hat{\phi}(\mathbf{y}), \quad \text{où } \phi = f \circ P. \tag{7}$$

IV. Fonction thêta associée à un réseau

Dans cette partie on considère $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire euclidien $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ et Λ un réseau de $\mathbb{R}^d$ (voir partie III pour la définition). On considère le demi-plan de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}.$$

On définit la fonction thêta associée à Λ :

$$\forall \tau \in \mathbb{H},\ \ \Theta_\Lambda(\tau) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} e^{i\pi\tau\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Le but de cette partie est de montrer qu'à certaines conditions, cette fonction est une forme modulaire.

IV.1. Montrer que Θ_Λ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{H}$. Montrer que si Λ est pair, c'est-à-dire que $\forall \mathbf{x} \in \Lambda,\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \equiv 0 \mod 2$, alors

$$\forall \tau \in \mathbb{H}, \quad \Theta_\Lambda(\tau + 1) = \Theta_\Lambda(\tau).$$

IV.2. A l'aide des résultats de la partie III, montrer que

$$\forall t > 0,\ \Theta_{\Lambda'}\left(-\frac{1}{it}\right) = t^{d/2}\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d/\Lambda)\Theta_\Lambda(it),$$

où Λ' est le réseau dual de Λ, voir (6). On pourra montrer le résultat pour $t = 1$ puis considérer le réseau $\sqrt{t}\,\Lambda$.

IV.3. En déduire que

$$\forall \tau \in \mathbb{H},\ \Theta_{\Lambda'}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{d/2}\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d/\Lambda)\Theta_\Lambda(\tau).$$

On définit le groupe spécial linéaire

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in M_2(\mathbb{Z}),\ \det(M) = 1\},$$

et on pose

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.4. Montrer que pour toute matrice $M \in SL_2(\mathbb{Z})$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ tels que $ST^{-k_1}ST^{-k_2}\dots ST^{-k_m}M$ ou $ST^{-k_1}ST^{-k_2}\dots ST^{-k_m}SM$ soit triangulaire supérieure (on pourra considérer l'action de S et T par multiplication à gauche sur $SL_2(\mathbb{Z})$). En déduire que le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par S et T.

IV.5. Vérifier que si $\tau \in \mathbb{H}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, alors $\dfrac{a\tau + b}{c\tau + d} \in \mathbb{H}$.

Une forme modulaire de poids $2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) pour $SL_2(\mathbb{Z})$ est une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ satisfaisant les conditions suivantes :
(i) f est holomorphe sur $\mathbb{H}$,
(ii) $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\forall \tau \in \mathbb{H}$, $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau + d)^{2k} f(\tau)$,
(iii) f admet un développement

$$\forall \tau \in \mathbb{H}, \quad f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2i\pi n\tau} \quad \textit{avec } a_n \in \mathbb{C}.$$

IV.6. À quelles conditions Θ_Λ est-elle une forme modulaire pour $SL_2(\mathbb{Z})$? Donner un exemple de réseau Λ convenant.

Fin de l'épreuve.