2C9121

Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay
Ecole Normale Supérieure de Rennes

SECOND CONCOURS

ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2019

Épreuve de MATHEMATIQUES 1

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mathématiques générales

Une part importante de l'évaluation concernera la clarté et la rigueur de l'argumentation. Si l'on est amené à admettre le résultat d'une question, on le mentionne explicitement. **La théorie des distributions n'est pas requise. Si les candidats sont amenés à utiliser un résultat de cette théorie, ils l'énonceront précisément et le démontreront.**

Le sujet comporte diverses parties dont les dépendances sont décrites dans la figure 1.

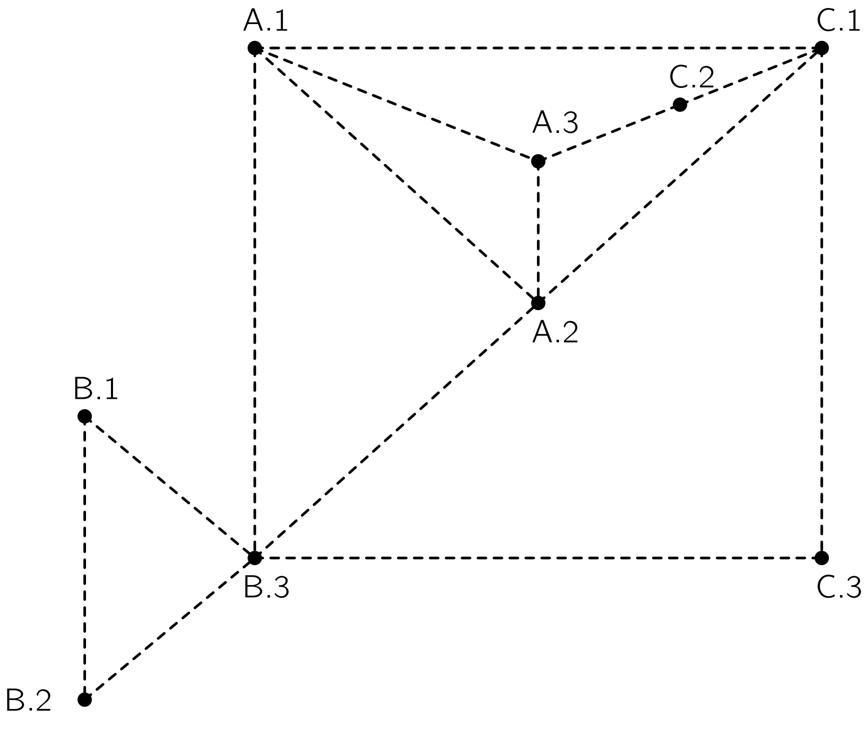

Figure 1 – Dépendances entre les parties du sujet

Notations générales et rappels

Notation 1. Si $f : E \to F$ est une application, son graphe est, par définition,

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)), x \in E\} \subset E \times F\,.$$

Notation 2. Dans ce sujet, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désignera un espace de Hilbert et le produit scalaire sera supposé anti-linéaire à gauche. On munit $H \times H$ du produit scalaire hermitien défini par :

$$\langle u, v \rangle_{H\times H} = \langle u_1, v_1 \rangle_H + \langle u_2, v_2 \rangle_H , \quad \forall (u, v) \in (H \times H)^2 .$$

L'espace $(H \times H, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H\times H})$ est un espace de Hilbert.

Notation 3. Nous utiliserons souvent les espaces suivants :

i. $\mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact,

ii. $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à support compact,

iii. la classe de Schwartz

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \{\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 : x^k \partial_x^\ell \psi \in L^\infty(\mathbb{R})\} .$$

Les fonctions sont, par défaut, supposées être à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Notation 4. ρ désignera une fonction de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ positive à support dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R} , \quad \rho_n(x) = n\rho(nx) .$$

χ désignera une fonction de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ positive à support dans $[-2, 2]$ et égale à 1 sur $[-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R} , \quad \chi_n(x) = \chi(n^{-1}x) .$$

Notation 5. Si f et g sont deux fonctions mesurables, et sous réserve que cela ait un sens, on note

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) \, \mathrm{d}y .$$

Rappel 1. L'ensemble des fonctions continues à support compact $\mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Rappel 2. La transformation de Fourier est définie par :

$$\forall \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) , \quad \forall \xi \in \mathbb{R} , \quad \mathscr{F}(\psi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x .$$

$\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est un automorphisme qui s'étend en un automorphisme de $L^2(\mathbb{R})$. Ce prolongement vérifie

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \quad \mathscr{F}(\psi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x ,$$

et

$$\forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) , \quad \langle \mathscr{F}(\varphi), \mathscr{F}(\psi) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} .$$

De plus, pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{F}^{-1}\psi(x) = (2\pi)^{-1} \mathscr{F}\psi(-x) .$$

Rappel 3 (Théorème du graphe fermé)**.** Soient E et F des espaces de Banach. Soit $T : E \to F$ linéaire. Alors T est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$ (muni de la topologie produit).

A Opérateurs

On rappelle les Notations 1 et 2.

Définition 1. On appelle opérateur toute application linéaire $T : D \to H$ (D étant un sous-espace vectoriel de H). Le sous-espace D est appelé domaine de T et noté $\mathsf{Dom}\,(T)$. Lorsqu'on parlera de l'opérateur T, il sera sous-entendu qu'il agit sur son domaine $\mathsf{Dom}\,(T)$. Lorsque $x \in \mathsf{Dom}(T)$, on note $Tx = T(x)$.

A.1 Opérateurs fermés

Définition 2. On dit qu'un opérateur est fermé lorsque son graphe $\Gamma(T)$ est une partie fermée de $(H \times H, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H\times H})$.

1– Soit T un opérateur. Pour tout $\varphi, \psi \in \mathsf{Dom}\,(T)$, on pose

$$\langle \varphi, \psi \rangle_T = \langle \varphi, \psi \rangle + \langle T\varphi, T\psi \rangle \,.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathsf{Dom}\,(T)$.

2– Montrer que T est un opérateur fermé si et seulement si $(\mathsf{Dom}\,(T), \langle, \cdot, \cdot \rangle_T)$ est un espace de Hilbert.

Dans la suite du sujet, on observera que si $T : H \to H$ est un opérateur, alors T est continu si et seulement si T est fermé.

A.2 Opérateurs adjoints

On suppose que T est un opérateur à domaine dense dans H.
On définit

$$D^* = \{\psi \in H \,, \exists C > 0 \,, \forall \varphi \in \mathsf{Dom}\,(T) \,, \quad |\langle \psi, T\varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|\} \,.$$

3– Vérifier que D^* est un sous-espace vectoriel de H.

4– Déterminer D^* lorsque $T : H \to H$ est un opérateur continu.

5– Soit $D \subset H$ une partie dense. Soit $(a, b) \in H \times H$ tel que

$$\forall x \in D \,, \quad \langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle \,.$$

Montrer que $a = b$.

6– Soit $\psi \in D^*$. Montrer qu'il existe un unique $u_\psi \in H$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathsf{Dom}\,(T)$,

$$\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle u_\psi, \varphi \rangle \,.$$

7– Montrer que $D^* \ni \psi \mapsto u_\psi \in H$ est un opérateur. On le notera désormais T^* et on l'appelle « adjoint » de T. On posera $\mathsf{Dom}\,(T^*) = D^*$.

8– On considère $J : H \times H \to H \times H$ définie par $J(x, y) = (-y, x)$, pour tout $(x, y) \in H \times H$. Montrer que
$$J(\Gamma(T^*)) = [\Gamma(T)]^\perp\,,$$
où l'orthogonal est pris au sens du produit scalaire de la Notation 2.

9– Montrer que T^* est un opérateur fermé.

10– On suppose dans cette question que T est un opérateur fermé.

a- Montrer que $\mathbf{Dom}\,(T^*)$ est dense dans H. On montrera que $[\mathbf{Dom}\,(T^*)]^\perp = \{0\}$.

b- Soit $A \subset H \times H$. Montrer que $J^{-1}(A^\perp) = [J(A)]^\perp$.

c- Montrer que $(T^*)^* = T$.

A.3 Un opérateur discret

Ici $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ est muni du produit scalaire usuel :
$$\forall u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})\,, \quad \langle u, v\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{u_n} v_n\,.$$
On considère l'application $R : \mathbb{C}^\mathbb{N} \to \mathbb{C}^\mathbb{N}$ définie par :
$$\forall u \in \mathbb{C}^\mathbb{N}\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,, \quad (Ru)_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\,. \tag{1}$$

11– Montrer que R induit un endormorphisme, toujours noté R, sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. L'opérateur $R : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ est-il fermé ?

12– Quel est l'adjoint de R ?

B Propriétés d'un espace de Sobolev

B.1 Préliminaires

On rappelle les Notations 3, 4 et 5. Le but de cette section est de montrer la densité de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ à partir des énoncés fournis dans les rappels.

13– Soit $f \in \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

14– Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\rho_n \star f$ est bien défini. Vérifier que, si $\mathrm{supp}(f) \subset [a, b]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{supp}(\rho_n \star f) \subset [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$.

15– Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

16– Montrer que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\rho_n \star f$ est bien défini et appartient à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

17– Montrer que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\rho_n \star f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\rho_n \star f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

18– Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $\chi_n(\rho_n \star f)$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

19– Conclure.

B.2 Quelques propriétés de $H^1(\mathbb{R})$

On définit

$$H^1(\mathbb{R}) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \exists u \in L^2(\mathbb{R}) \, , \forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \psi \varphi' \, \mathrm{d}x = - \int_{\mathbb{R}} u \varphi \, \mathrm{d}x \right\} .$$

20– Expliquer pourquoi

$$H^1(\mathbb{R}) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \exists ! u \in L^2(\mathbb{R}) \, , \forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \psi \varphi' \, \mathrm{d}x = - \int_{\mathbb{R}} u \varphi \, \mathrm{d}x \right\} .$$

Pour chaque $\psi \in H^1(\mathbb{R})$, on notera désormais d_ψ cet unique u.
Pour tout $\psi, \varphi \in H^1(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{H^1(\mathbb{R})} = \langle \psi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \langle d_\psi, d_\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} .$$

21– Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset H^1(\mathbb{R})$ et expliciter d_ψ lorsque $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

22– Montrer que $(H^1(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\mathbb{R})})$ est un espace de Hilbert.

23– a- Montrer que $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ pour la norme $H^1(\mathbb{R})$.

b- On note $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables de carré intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$. Soit $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et $v \in L^2(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} v \varphi \, \mathrm{d}x .$$

Montrer que $u \in L^2(\mathbb{R})$ et $u = v$.

c- Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $\xi \mathscr{F}(\psi) \in L^2(\mathbb{R})$. Dans ce cas, montrer que $\mathscr{F}(d_\psi) = i \xi \mathscr{F}(\psi)$.

On examinera la définition de $H^1(\mathbb{R})$, puis on utilisera la question 23a, la formule de Parseval et la question 23b.

d- Montrer que, pour tout $\psi \in H^1(\mathbb{R})$, $\mathscr{F}(\psi) \in L^1(\mathbb{R})$.

e- En déduire que tout $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ s'identifie à une fonction continue. Vérifier également que (pour ce représentant),

$$\forall x \in \mathbb{R} \, , \quad |\psi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})} .$$

24– a- Soit $f \in H^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho_n \star f \in H^1(\mathbb{R})$ et

$$d_{\rho_n \star f} = (\rho_n \star f)' = \rho_n \star d_f .$$

b- Montrer que $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(H^1(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\mathbb{R})})$.

c- Soit $\psi \in H^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \|d_\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \sqrt{|x - y|} .$$

B.3 Un opérateur non discret

Ici $H = L^2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel :

$$\forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi} \psi \, \mathrm{d}x .$$

Soit $V \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit S_V l'opérateur de domaine $\mathrm{Dom}\,(S_V) = \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et défini par :

$$\forall \psi \in \mathrm{Dom}\,(S_V), \quad S_V \psi = -i\psi' + V\psi . \tag{2}$$

25– Montrer que l'adhérence de $\Gamma(S_V)$ dans $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ est le graphe d'un opérateur qu'on explicitera. L'opérateur S_V est-il fermé ?

26– Quel est l'adjoint de S_V ? On caractérisera précisément $\mathrm{Dom}\,(S_V^*)$.

C Spectre

C.1 Propriétés générales du spectre d'un opérateur

Définition 3. Soit T un opérateur **fermé**.

i. On dit que $z \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de T lorsque $T - z\mathrm{Id} : \mathrm{Dom}\,(T) \to H$ n'est pas bijectif. On note $\mathrm{sp}(T)$ l'ensemble des éléments du spectre.

ii. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $T : \mathrm{Dom}\,(T) \to H$ lorsque $\ker(T - z\mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

Noter que, lorsque $T : \mathrm{Dom}\,(T) \to H$ est bijectif, son inverse $T^{-1} : H \to \mathrm{Dom}\,(T)$ pourra être considéré comme à valeurs dans H et que, par conséquent, $T^{-1} : H \to H$ n'est pas nécessairement bijectif.

27– Montrer que, si z n'appartient pas au spectre de T, alors $(T - z)^{-1} : H \to H$ est une application linéaire continue.

28– Montrer que $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

29– Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons qu'il existe une suite $(u_n) \in \mathrm{Dom}\,(T)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \|(T - z)u_n\| = 0$. Montrer que $z \in \mathrm{sp}(T)$.

30– On suppose que $\mathrm{Dom}\,(T)$ est dense dans H.

a- Montrer que T est bijectif si et seulement si T^* est bijectif.

b- Montrer que $z \in \mathrm{sp}(T)$ si et seulement si $\overline{z} \in \mathrm{sp}(T^*)$.

C.2 Spectre d'une multiplication

On considère l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2([0,2\pi])} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \overline{f} g \, \mathrm{d}x .$$

On considère l'opérateur $M : L^2([0, 2\pi]) \to L^2([0, 2\pi])$ défini par :

$$\forall f \in L^2([0, 2\pi]), \quad Mf(x) = \cos(x) f(x) .$$

31– Justifier que cet opérateur est bien défini et fermé.

32– Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M.

33– Déterminer $\mathrm{sp}(M)$. Pour tout $a \in]-1,1[$, on pourra construire une suite de fonctions (ψ_n) de $L^2([0,2\pi])$, normalisées, telle que $\|(M-a)\psi_n\|_{L^2([0,2\pi])}$ tend vers 0.

34– En utilisant la bijection isométrique

$$\mathscr{J} : \ell^2(\mathbb{Z}) \ni u \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx} \in L^2([0,2\pi])\,,$$

trouver le spectre de $R : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ (voir (1) et la question 11).

C.3 Spectre d'un opérateur non discret

35– À l'aide de la question 23c, déterminer le spectre de S_0^* (voir (2), quand $V = 0$), après avoir expliqué pourquoi ce spectre est bien défini.

36– Quel est le spectre de $(S_0^*)^*$?

FIN DE L'EPREUVE