2C9122

Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay
Ecole Normale Supérieure de Rennes

SECOND CONCOURS – ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2019

Epreuve de Mathématiques 2

Durée : 5 heures

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sujet 1- Probabilités et statistiques

Sujet 2- Analyse numérique

Le candidat traitera au choix le sujet 1 ou le sujet 2 et rappellera sur sa copie le sujet qu'il a choisi de traiter.

Sujet : Probabilités et Statistiques

Préambule

Ce sujet est consacré à l'étude de la marche persistante, qui est une chaîne de Markov $(X_n, V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ définie comme suit. On considère $U : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{Z} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-U(k)} < +\infty\,.$$

On cherche, par méthode de Monte-Carlo, à calculer des moyennes par rapport à la loi de probabilité π sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$\pi(k) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-U(k)} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Pour cela, on considère $X_0 \in \mathbb{Z}$ et $V_0 \in \{-1, 1\}$ des conditions initiales et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (ce qu'on note dans la suite : i.i.d.) de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ (uniforme sur $[0, 1]$), indépendante de (X_0, V_0), et on pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$(X_{n+1}, V_{n+1}) = \begin{cases} (X_n + V_n, V_n) & \text{si } A_n \leqslant \min\left(1, e^{U(X_n)-U(X_n+V_n)}\right) \\ (X_n, -V_n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle X_n et V_n respectivement la position et la vitesse de la marche persistante au temps n. Si $V_n = -V_{n-1}$, on dit qu'il y a une collision au temps n.

On rappelle que la loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$, notée $\mathcal{G}(p)$, est la loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ de fonction de répartition $F(k) = 1 - (1 - p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Les 4 sections sont indépendantes. On pourra admettre le résultat d'une question pour l'utiliser par la suite.

1 Simulation de la chaîne

L'objectif de cette section est de proposer une méthode efficace pour simuler une trajectoire de la chaîne de Markov. Par “efficace”, on entend une méthode qui ne nécessite pas de calculer $U(X_n)$ à chaque temps $n \in \mathbb{N}$, ce qui peut s'avérer coûteux en pratique. On part du principe qu'un ordinateur peut générer des variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

1. Soit A de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ et $\alpha < 0$. Montrer que $\lceil \alpha \ln A \rceil$ est une variable aléatoire de loi géométrique dont on précisera le paramètre (on rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ désigne la partie supérieure de x, c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à x).
2. On note $T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N}_*,\ V_n = -V_{n-1}\}$ le premier temps de collision. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k < T_1$, exprimer (X_k, V_k) en fonction de (X_0, V_0) et k, et de même exprimer (X_{T_1}, V_{T_1}) en fonction de (X_0, V_0) et T_1.

L'objectif revient donc à simuler T_1 efficacement. Dans les questions suivantes, on suppose que U est Lipschitz, c'est-à-dire que $|U(x + 1) - U(x)| \leqslant L$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, avec une constante L connue. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_{k+1} = \inf\{n > S_k,\ A_n > e^{-L}\}\,.$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, quelle est la loi de $S_{k+1} - S_k$?

4. Montrer que, pour $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$, $S_{i+1} - S_i$ est indépendant de $S_{j+1} - S_j$.
5. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}_*$, la loi de S_k est donnée par

$$\mathbb{P}\left(S_k = s\right) = \binom{s-1}{k-1} e^{-L(s-k)}(1-e^{-L})^k \qquad \forall s \geqslant k$$

(on pourra raisonner par récurrence ; ou bien remarquer qu'il y a autant de n-uplets d'entiers non nuls dont la somme vaut $m \in \mathbb{N}$ que de façons de mettre $n-1$ barrières entre m boules alignées, les entiers du n-uplet étant alors donnés par le nombre de boules entre deux barrières successives).

On considère une suite i.i.d. $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de loi $\mathcal{U}([0,1])$ indépendante de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de (X_0, V_0) et on pose

$$\tilde{T}_1 = \inf\left\{k \in \mathbb{N}_*,\ A_{k-1} > e^{-L} \text{ et } B_{k-1} \leqslant \frac{1 - e^{U(X_0+(k-1)V_0) - U(X_0+kV_0)}}{1-e^{-L}}\right\}.$$

6. Montrer que $\tilde{T}_1$ a la même loi que T_1.
7. Proposer une façon de simuler $(X_n, V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de deux suites i.i.d. de variables aléatoires de loi uniformes sur $[0,1]$, de telle sorte que $U(X_k)$ ne soit pas systématiquement calculé pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2 Invariance de la mesure de Gibbs

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble discret, et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathcal{E}$, qui est homogène, c'est-à-dire telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(Z_{n+1} = z' \;\middle|\; Z_n = z\right) = \mathbb{P}\left(Z_1 = z' \;\middle|\; Z_0 = z\right).$$

On rappelle qu'à une telle chaîne est associé un noyau de transition $q : \mathcal{E}^2 \to [0,1]$ défini par

$$q\left(z, z'\right) = \mathbb{P}\left(Z_1 = z' \;\middle|\; Z_0 = z\right) \qquad \forall z, z' \in \mathcal{E}.$$

Remarquons que, à $z \in \mathcal{E}$ fixé, $q(z, \cdot)$ est une loi de probabilité sur $\mathcal{E}$.

Un noyau de transition est dit symétrique si $q\left(z, z'\right) = q\left(z', z\right)$ pour tous $z, z' \in \mathcal{E}$. Pour ν une loi de probabilité sur $\mathcal{E}$, q est dit ν-réversible si

$$\nu(z) q\left(z, z'\right) = \nu(z') q\left(z', z\right) \qquad \forall z, z' \in \mathcal{E}.$$

D'autre part, ν est dite invariante pour $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou, de façon équivalente, pour q) si le fait que Z_0 soit distribué selon ν entraîne que Z_1 est distribué selon ν.

1. Montrer que, si q est le noyau de transition associé à $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors ν est invariante pour $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\nu(z) \ = \ \sum_{z' \in \mathcal{E}} \nu(z') q(z', z) \qquad \forall z \in \mathcal{E}.$$

2. Montrer que, si ν est invariante pour $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et si Z_0 est distribué selon ν, alors Z_n est distribué selon ν pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si q est ν-réversible, alors ν est invariante pour q.

Étant donnés deux noyaux de transition q_1 et q_2 sur $\mathcal{E}$, on définit une chaîne de Markov de la façon suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étant donné $Y_n \in \mathcal{E}$, on tire aléatoirement $\tilde{Y}_n$ selon la loi $q_1(Y_n, \cdot)$, puis Y_{n+1} selon la loi $q_2(\tilde{Y}_n, \cdot)$. On note q_3 le noyau de transition de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Exprimer q_3 en fonction de q_1 et q_2.
5. Montrer que, si ν est invariante pour q_1 et q_2, alors ν est invariante pour q_3.

Étant donné un noyau de transition q et une loi de probabilité ν sur $\mathcal{E}$, l'algorithme de Metropolis-Hastings définit une chaîne de Markov de la façon suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étant donné $Y_n \in \mathcal{E}$ on tire aléatoirement $\tilde{Y}_n$ selon la loi $q\,(Y_n, \cdot)$ et $B_n \sim \mathcal{U}([0,1])$, et on pose

$$Y_{n+1} = \begin{cases} \tilde{Y}_n & \text{si } B_n \leq \min\left(1, \frac{\nu(\tilde{Y}_n)}{\nu(Y_n)}\right) \\ Y_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note q_ν le noyau de transition de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Exprimer q_ν en fonction de q et ν.
7. Montrer que, si q est symétrique, alors q_ν est ν-réversible.

Dans la suite de cette section, $\mathcal{E} = \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$. On considère une chaîne de Markov $(Y_n, W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{E}$ donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$(Y_{n+1}, W_{n+1}) = (Y_n + W_n, -W_n)\,.$$

8. Donner le noyau de transition de $(Y_n, W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. Montrer que ce dernier est symétrique.

On considère la loi de probabilité ν sur $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ donnée par

$$\nu(x, v) = \frac{1}{2}\pi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{Z},\ v \in \{-1, 1\}\,,$$

et une chaîne de Markov $(Y'_n, W'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{E}$ donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$(Y'_{n+1}, W'_{n+1}) = (Y'_n, -W'_n)\,.$$

10. Montrer que le noyau de transition de $(Y'_n, W'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ν-réversible.
11. Déduire de toutes les questions précédentes que ν est invariante pour la marche persistante $(X_n, V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans le préambule du sujet.
12. Montrer que, si (X_0, V_0) est distribué selon la loi ν, alors X_n est distribué selon la loi π pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. Le noyau de transition de la marche persistante est-il réversible ?

3 Ergodicité dans un cas unimodal

Dans toute cette partie, on suppose que U est paire ($U(k) = U(-k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$) et qu'il existe $r > 0$ tel que $U(k+1) - U(k) \geqslant r$ pour tout $k \geqslant 0$. En particulier, U est strictement décroissante sur $]\!] -\infty, 0]\!]$ et strictement croissante sur $[\![0, +\infty[\![$. On considère également une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ qu'on suppose paire et bornée. L'objectif est d'étudier la limite quand n tend vers l'infini de la moyenne empirique

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\,.$$

On suppose que $(X_0, V_0) = (0,1)$ et l'on pose $R_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T_n &= \inf\{k \geqslant R_n,\ V_{k+1} = -V_k\} - R_n \\ R_{n+1} &= \inf\{k > R_n,\ X_k = 0\}\,. \end{aligned}$$

1. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $X_n V_n \leqslant 0$. Montrer qu'alors, presque sûrement, $X_{n+k} = X_n + kV_n$ pour tout $k \leqslant |X_n|$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} - R_n = 2T_n + 1$.
3. Calculer V_{R_k} pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(T_0 \geqslant k\right) = e^{U(0)-U(k)}\,.$$

5. En déduire que R_1 est d'espérance et de variance finie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$Z_n = \sum_{k=R_n}^{R_{n+1}-1} f(X_k)\,.$$

On admettra que, du fait de la parité de U et f et de la propriété de Markov forte, les $\{Z_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont indépendants et identiquement distribués.

6. Montrer que Z_0 est d'espérance et de variance finie.
7. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(Z_0\right) = \lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\pi(k) \qquad \text{avec } \lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{U(0)-U(k)}\,.$$

8. En déduire que $\mathbb{E}(R_{n+1} - R_n) = \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. On note $\mathcal{A}_n$ l'événement $\{|R_n/(n\lambda) - 1| \leqslant n^{-\frac{1}{4}}\}$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, $\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_n\right) \geqslant 1 - C/\sqrt{n}$.
10. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{B}_n^\varepsilon$ l'événement

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\pi(k)\right| \geqslant \varepsilon\right\}\,.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_{\lceil n/\lambda\rceil} \cap \mathcal{B}_n^\varepsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

11. En déduire que $n^{-1}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ converge en probabilité quand n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.

4 Limite d'échelle

Dans cette partie, on considère $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ avec $\|H''\|_\infty < \infty$ et qui tend vers l'infini à l'infini, et $x \in \mathbb{R}$, $v \in \{-1,1\}$ fixés. Pour tout $\delta > 0$, on considère $x_\delta \in \mathbb{Z}$ et on note $U_\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $U_\delta(k) = H(\delta k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On considère la marche persistante $(X_n^\delta, V_n^\delta)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à U_δ et avec conditions initiales (x_δ, v) telle que définie dans le préambule, c'est-à-dire qu'on pose $(X_0^\delta, V_0^\delta) = (x_\delta, v)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(X_{n+1}^\delta, V_{n+1}^\delta) = \begin{cases} (X_n^\delta + V_n^\delta, V_n^\delta) & \text{si } A_n \leqslant \min\left(1, e^{U_\delta(X_n^\delta) - U_\delta(X_n^\delta + V_n^\delta)}\right) \\ (X_n^\delta, -V_n^\delta) & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Le but est d'étudier le comportement de la chaîne lorsque δ tend vers 0. On pose $T_0^\delta = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}_*$,

$$T_k^\delta = \inf\{n > T_{k-1},\ V_n^\delta = -V_{n-1}^\delta\}\,.$$

On s'intéresse d'abord au premier temps de collision T_1^δ.

1. Montrer que, pour $v \in \{-1,1\}$, $\int_0^t (vH'(vs))_+\,\mathrm{d}s$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$ (où, pour $y \in \mathbb{R}$, $(y)_+ := \max(0,y)$ désigne la partie positive de y).
2. Montrer que la fonction de répartition F_δ de T_1^δ est donnée par
$$F_\delta(k) = 1 - \exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1}\Big(U_\delta(x_\delta + (j+1)v) - U_\delta(x_\delta + jv)\Big)_+\right) \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$
3. En déduire que, si δx_δ tend vers x quand δ tend vers 0, alors δT_1^δ converge en loi quand δ tend vers 0 vers une variable T_1^* dont on précisera la fonction de répartition F_* sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que, si δx_δ tend vers x quand δ tend vers 0, alors $(\delta X^\delta_{T_1^\delta}, V^\delta_{T_1^\delta})$ converge en loi quand δ tend vers 0 vers une variable aléatoire que l'on précisera (en l'exprimant en fonction de T_1^*).
5. Soit Y une variable aléatoire de fonction de répartition F. On rappelle que l'inverse généralisée F^{-1} de F est définie par $F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R},\ F(t) \geqslant u\}$ pour $u \in [0,1]$. Soit A une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Montrer que $F^{-1}(A)$ a la même loi que Y.
6. Construire une variable aléatoire S_1^* de même loi que T_1^* et, pour tout $\delta > 0$, une variable aléatoire S_1^δ de même loi que T_1^δ, de telle sorte que, si δx_δ tend vers x quand δ tend vers 0, alors δS_1^δ converge presque sûrement vers S_1^* quand δ tend vers 0.

À partir de maintenant on suppose que $x_\delta = \lceil x/\delta \rceil$. Pour $\delta > 0$, $z \in \mathbb{Z}$ et $v \in \{-1,1\}$ on note $F_{\delta,z,v}$ la fonction de répartition sur $\mathbb{N}$ définie par

$$F_{\delta,z,v}(k) = 1 - \exp\left(-\sum_{j=0}^{k}\Big(U_\delta(z + (j+1)v) - U_\delta(z + jv)\Big)_+\right) \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

On pose $(Y_0^\delta, W_0^\delta) = (x_\delta, v)$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n^\delta = F^{-1}_{\delta, Y_n^\delta, W_n^\delta}(A_n)\,, \qquad Y_{n+1}^\delta = Y_n^\delta + \left(S_n^\delta - 1\right) W_n^\delta \qquad \text{et} \qquad W_{n+1}^\delta = -W_n^\delta\,.$$

7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(Y_k^\delta, W_k^\delta, S_k^\delta)$ a la même loi que $(X^\delta_{T_k^\delta}, V^\delta_{T_k^\delta}, T_{k+1}^\delta - T_k^\delta)$.
8. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}_*$, $(\delta Y_k^\delta, W_k^\delta, \delta S_k^\delta)_{k\in[\![0,N]\!]}$ converge presque sûrement quand δ tend vers 0 vers un vecteur aléatoire $(Y_k^*, W_k^*, S_k^*)_{k\in[\![0,N]\!]}$ dont on précisera la construction.

Pour tout $\delta > 0$, on définit $R_0^\delta = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n^\delta = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^\delta - 1/2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [R_n^\delta, R_{n+1}^\delta[$, on pose $\tilde{V}_t^\delta = (-1)^n v$. Enfin, pour tout $t \geqslant 0$, on pose $\tilde{X}_t^\delta = x_\delta + \int_0^t \tilde{V}_s^\delta \mathrm{d}s$.

9. Montrer que $(\tilde{X}_n^\delta, \tilde{V}_n^\delta)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même loi que $(X_n^\delta, V_n^\delta)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pose $R_n^* = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [R_n^*, R_{n+1}^*[$, on pose $\tilde{V}_t^* = (-1)^n v$. Enfin, pour tout $t \geqslant 0$, on pose $\tilde{X}_t^* = x + \int_0^t \tilde{V}_s^* \mathrm{d}s$.

10. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}_*$ et pour tout $(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}_*^N$,
$$\Big((\delta \tilde{X}^\delta_{t_1/\delta}, \tilde{V}^\delta_{t_1/\delta}), \dots, (\delta \tilde{X}^\delta_{t_N/\delta}, \tilde{V}^\delta_{t_N/\delta})\Big) \xrightarrow[\delta\to 0]{p.s} \Big((\tilde{X}^*_{t_1}, \tilde{V}^*_{t_1}), \dots, (\tilde{X}^*_{t_N}, \tilde{V}^*_{t_N})\Big)$$
11. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}_*$ et pour tout $(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}_*^N$,
$$\left((\delta X^\delta_{\lceil t_1/\delta\rceil}, V^\delta_{\lceil t_1/\delta\rceil}), \dots, (\delta X^\delta_{\lceil t_N/\delta\rceil}, V^\delta_{\lceil t_N/\delta\rceil})\right)$$
converge en loi, quand δ tend vers 0, vers une limite qu'on précisera.

Schémas numériques pour les équations de Hamilton-Jacobi

On considère une fonction H continue sur $\mathbb{R}$, et une condition initiale $x \mapsto u_0(x)$ bornée et Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de constante de Lipschitz L. Soit $(t,x) \mapsto u(t,x)$ solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \partial_t u + H(\partial_x u) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{HJ}$$

La fonction H est appelée *Hamiltonien.* Si H et u_0 sont suffisamment régulières, et si u_0 est à support compact, on peut montrer que ce problème admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^2$ définie pour $t \in [0, T[$ et $x \in \mathbb{R}$, où T est un temps maximal d'existence. Si on considère que u est solution presque partout de l'équation (HJ), on peut alors exhiber des solutions moins régulières, Lipschitziennes et définies sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$. Elles ne sont en revanche pas uniques. On peut montrer qu'une classe de solutions, appelées *solution de viscosité*, assure l'existence sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ et l'unicité de la solution de (HJ). Cette notion sera définie dans la suite.
Le but de ce problème est de proposer des schémas aux différences finies pour (HJ). Le manque de régularité des solutions de viscosité, la complexité de leur définition, ainsi que la non linéarité de (HJ) entraînent que des conditions doivent être vérifiées pour assurer la convergence des schémas vers la solution de viscosité de (HJ).

I - Notations

Dans toute la suite, on considérera les paramètres Δt et Δx strictement positifs et on définit la grille

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)_{n\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{Z}}.$$

De manière générale, on notera en majuscules les suites bornées $U = (U_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$. On équipera cet espace de la norme

$$\|U\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |U_j|,$$

et si $U, V \in l^\infty(\mathbb{Z})$, on notera $U \leqslant V$ si $\forall j \in \mathbb{Z}$, $U_j \leqslant V_j$.

On notera U^n l'approximation numérique de u par le schéma au temps t_n : il s'agit d'un élément de $l^\infty(\mathbb{Z})$ dont les valeurs sont notées U_j^n (qui est donc une approximation de $u(t_n, x_j)$). On va considérer des schémas explicites à un pas qu'on définit par récurrence, avec l'initialisation $U_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et avec la relation

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ U_j^{n+1} = G(U_{j-p}^n, \ldots, U_{j+q+1}^n), \tag{S}$$

où $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sont fixés. La fonction G est donc une fonction de $p+q+2$ variables. Pour simplifier les notations, on pourra aussi écrire cette relation sous forme vectorielle

$$U^{n+1} = \mathbf{G}(U^n). \tag{1}$$

On suppose que le schéma est écrit à l'aide de différences finies, c'est à dire qu'il existe une fonction g telle que

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ G(U_{j-p}^n, \ldots, U_{j+q+1}^n) = U_j^n - \Delta t\ g\left(\frac{U_{j-p+1}^n - U_{j-p}^n}{\Delta x}, \ldots, \frac{U_{j+q+1}^n - U_{j+q}^n}{\Delta x}\right). \tag{2}$$

L'expression précédente n'est qu'une réécriture du schéma (S), on utilisera indifféremment les deux formes. La fonction g est appelée *Hamiltonien numérique*, elle sera supposée localement Lipschitzienne dans la suite :

$$\forall v \in \mathbb{R}^{p+q+1},\ \forall \eta > 0,\ \exists k > 0,\ \forall w_1, w_2 \in B_{\|\cdot\|}(v,\eta),\ |g(w_1) - g(w_2)| \leqslant k\|w_1 - w_2\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^{p+q+1}$, et $B_{\|\cdot\|}(v,\eta)$ est la boule ouverte de centre v et de rayon η associée à cette norme.

On rappelle que l'erreur de troncature du schéma (S) s'écrit

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N},\ \ E_j^n = u(t_{n+1}, x_j) - G(u(t_n, x_{j-p}), \dots, u(t_n, x_{j+q+1})),$$

où u est une solution de (HJ) qu'on suppose de classe $\mathcal{C}^2$. Un schéma est dit consistant si il existe $r > 0$ et $s > 0$ tels que

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ E_j^n = \Delta t \left(\mathcal{O}(\Delta t^r) + \mathcal{O}(\Delta x^s)\right),$$

quand Δt et Δx tendent vers 0. On dit alors qu'il est consistant à l'ordre r en temps et s en espace.

Question I – 1. On suppose que $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que $u \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[\times\mathbb{R})$. À l'aide de développements limités de u, montrer que

$$E_j^n = \Delta t \left[\partial_t u(t_n, x_j) + g\left(\partial_x u(t_n, x_j), \dots, \partial_x u(t_n, x_j)\right) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)\right].$$

En déduire que le schéma (S) est consistant avec l'équation (HJ) si et seulement si

$$\forall a \in \mathbb{R},\ g(a, \dots, a) = H(a), \tag{3}$$

et préciser son ordre de consistance.

Question I – 2. Soit $U \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathbf{G}(U) \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

On dira que le schéma (S) est *monotone* sur $[-R, R]$ si G est une fonction croissante de chacun de ses arguments sur le domaine

$$d_R = \left\{(U_{j-p}, \dots, U_{j+q+1}) \in \mathbb{R}^{p+q+2},\ \left|\frac{U_{j-p+1} - U_{j-p}}{\Delta x}\right| \leqslant R,\ \dots, \left|\frac{U_{j+q+1} - U_{j+q}}{\Delta x}\right| \leqslant R\right\}.$$

C'est à dire que pour tout $k \in [\![-p, q+1]\!]$, et en fixant $U_{j-p}, \dots, U_{j+k-1}, U_{j+k+1}, \dots, U_{j+q+1}$, la fonction

$$x \longmapsto G(U_{j-p}, \dots, U_{j+k-1}, x, U_{j+k+1}, \dots, U_{j+q+1}),$$

est croissante pour x tel que $(U_{j-p}, \dots, U_{j+k-1}, x, U_{j+k+1}, \dots, U_{j+q+1}) \in d_R$.

II - Le cas linéaire : l'équation de transport

Dans cette partie, on se place dans le cas de l'équation de transport : le Hamiltonien H est une fonction linéaire, $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = c\ x$ où $c \geqslant 0$ est fixé. En utilisant les notations précédentes, on considère le schéma aux différences finies donné par la fonction

$$G(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) = U_j^n - \Delta t\ c\ \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}, \tag{4}$$

et on suppose que Δt et Δx sont choisis tels que

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1.$$

Question II – 3. Montrer que le schéma (4) est consistant avec l'équation de transport.

Question II – 4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{Z},\ \inf_{i\in\mathbb{Z}} u_0(x_i) \leqslant u_j^n \leqslant \sup_{i\in\mathbb{Z}} u_0(x_i).$$

Question II – 5. Soit $\varepsilon_j^n = |u(t_n, x_j) - U_j^n|$. Montrer que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j^{n+1} \leqslant C\Delta t(\Delta t + \Delta x) + \sup_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j^n,$$

et en déduire que le schéma (4) est convergent, c'est à dire que

$$\sup_{n\in[\![0,N]\!]} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon_j^n \underset{\Delta t\to 0,\ \Delta x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Question II – 6. Montrer que le schéma (4) est monotone sur tout intervalle $[-R, R]$.

III - Stabilité du schéma (S)

Dans toute la suite de ce problème, on fixe le rapport

$$\Lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

on suppose que le schéma (S) est monotone sur $[-(L+1), L+1]$, où L est la constante de Lipschitz de u_0, et consistant avec l'équation (HJ). On définit l'ensemble

$$D_{L+1} = \left\{ U \in l^\infty(\mathbb{Z}),\ \forall j \in \mathbb{Z}, \left| \frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x} \right| \leqslant L+1 \right\}.$$

Ainsi $\mathbf{G} : D_{L+1} \longrightarrow l^\infty(\mathbb{Z})$. Dans toute cette partie, on considère $U, V \in D_{L+1}$.

Question III – 7. On suppose $U \leqslant V$. Montrer que $\mathbf{G}(U) \leqslant \mathbf{G}(V)$.

Dans toute la suite, on fera l'abus de notation suivant : si $U \in l^\infty(\mathbb{Z})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $U + \lambda$ l'élément de $l^\infty(\mathbb{Z})$ tel que $\forall j \in \mathbb{Z}$, $(U+\lambda)_j = U_j + \lambda$.

Question III – 8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $U + \lambda \in D_{L+1}$ et que $\mathbf{G}(U+\lambda) = \mathbf{G}(U) + \lambda$.

Question III – 9. Montrer que $U \leqslant V + \|U - V\|_\infty$, puis en déduire que $\|\mathbf{G}(U) - \mathbf{G}(V)\|_\infty \leqslant \|U - V\|_\infty$.

Question III – 10. Montrer que $\|\Delta_+ \mathbf{G}(U)\|_\infty \leqslant \|\Delta_+ U\|_\infty$.
Vous pourrez utiliser les opérateurs $\Delta_+ : D_{L+1} \longrightarrow l^\infty(\mathbb{Z})$ et $\tau_1 : D_{L+1} \longrightarrow D_{L+1}$, définis par

$$\forall\, U \in D_{L+1},\ \forall\, j \in \mathbb{Z},\ \ (\Delta_+ U)_j = U_{j+1} - U_j, \ \ \textit{et}\ \ (\tau_1 U)_j = U_{j+1}.$$

Question III – 11. Montrer que $\mathbf{G}(U) \in D_{L+1}$.

Question III – 12. Soient $K = \sup\{|g(\xi)|,\ \xi \in d_{L+1}\}$, et $n, m \in \mathbb{N}$. On note

$$\mathbf{G}^n = \underbrace{\mathbf{G} \circ \cdots \circ \mathbf{G}}_{n \text{ fois}},$$

montrer que $\|\mathbf{G}^{n+m}(U) - \mathbf{G}^n(U)\|_\infty \leqslant m \Delta t K$.

Question III – 13. Montrer que $\|\mathbf{G}^n(U)\|_\infty \leqslant \|U\|_\infty + n\Delta t |H(0)|$.

IV - Convergence du schéma (S)

Dans toute la suite, le schéma (S) est supposé monotone sur $[-(L+1), L+1]$ et consistant avec l'équation (HJ). On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et T tel que $N\Delta t = T$, et on suppose

$$\sup_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 0 \leqslant n \leqslant N}} \left\{ u(t_n, x_j) - U_j^n \right\} = \sigma \ > \ 0. \tag{5}$$

Le but de cette partie est de majorer σ, pour établir la convergence du schéma numérique. La même technique pourrait être utilisée pour estimer $\inf \left\{ u(t, x_j) - U_j^n \right\}$ dans le cas où cette quantité est négative. Pour établir ce résultat, on a besoin de définir plus précisément les solutions de viscosité des équations de Hamilon-Jacobi. On a le résultat suivant

Théorème 1 (Existence et unicité pour les équations de Hamilton-Jacobi)**.** *On suppose $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et u_0 bornée et Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction u bornée et Lipschitzienne sur $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ pour tout $T > 0$, telle que $u(0,x) = u_0(x)$ et telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$ et tout $T > 0$*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Si } (t_0,x_0) \textit{ est un point de maximum local de } u-\varphi \textit{ sur }]0,T] \times \mathbb{R} \textit{ alors} \\ \partial_t\varphi(t_0,x_0) + H\left(\partial_x\varphi(t_0,x_0)\right) \leqslant 0, \end{array} \right. \tag{6}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Si } (t_0,x_0) \textit{ est un point de minimum local de } u-\varphi \textit{ sur }]0,T] \times \mathbb{R} \textit{ alors} \\ \partial_t\varphi(t_0,x_0) + H\left(\partial_x\varphi(t_0,x_0)\right) \geqslant 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

Une telle fonction u est appelée *solution de viscosité* de l'équation (HJ). Remarquons que si la fonction u est solution classique (de classe $\mathcal{C}^1$) de l'équation (HJ), alors elle en est solution de viscosité. Réciproquement, une solution de viscosité de (HJ) vérifie

$$\partial_t u(t_0,x_0) + H\left(\partial_x u(t_0,x_0)\right) = 0,$$

en tout point (t_0,x_0) où elle est différentiable. Cette notion de solution est nécessaire pour avoir l'existence et l'unicité de la solution de (HJ) sur $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$. La solution de viscosité de (HJ) vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \inf_{\mathbb{R}} u_0 \leqslant tH(0) + u(t,x) \leqslant \sup_{\mathbb{R}} u_0. \tag{8}$$

On définit les ensembles

$$\begin{aligned} Q &= [0,+\infty[\times\mathbb{R}, & Q_T &= [0,T] \times \mathbb{R}, \\ Q^d &= (t_n,x_j)_{n\in\mathbb{N},\, j\in\mathbb{Z}}, & Q_N^d &= (t_n,x_j)_{0\,\leqslant\, n\,\leqslant\, N,\, j\in\mathbb{Z}}, \\ & & Q_{T,N} &= Q_T \times Q_N^d, \end{aligned}$$

et $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta(t,x) = 1-(t^2+x^2) & \text{si } t^2+x^2 \leqslant 1/2 \\ \beta(t,x) \;<\; 1/2 & \text{si } t^2+x^2 \;>\; 1/2 \\ \beta(t,x) = 0 & \text{si } t^2+x^2 \;>\; 1. \end{array} \right. \tag{9}$$

Pour $\varepsilon > 0$ on pose $\beta_\varepsilon(t,x) = \beta(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$.

Question IV – 14. Dans toute la suite, on pose

$$M = \sup_{y\in\mathbb{R}}(|u_0(y)|) + T|H(0)|.$$

(a). Montrer que pour tout $(t,x) \in Q_T$, $|u(t,x)| \leqslant M$.

(b). Montrer que pour tout $n \in [\![0,N]\!]$, $\|U^n\|_\infty \leqslant M$.

Pour simplifier, on suppose que

$$u(t,x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad U_j^n \underset{|j|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{10}$$

et que ces convergences sont uniformes en $t \in [0,T]$ et en $n \in [\![0,N]\!]$. On remarquera, mais ce n'est pas l'objet de ce problème, que cette hypothèse n'est pas nécessaire pour établir la convergence du schéma (S). On définit $\psi : Q \times Q^d \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall (t,x) \in Q,\ \forall (t_n,x_j) \in Q_d,\ \psi(t,x,t_n,x_j) = u(t,x) - U_j^n - \frac{\sigma}{4T}(t+t_n) + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(t-t_n, x-x_j).$$

Question IV – 15.

(a). En considérant un bon choix de (t,x,t_n,x_j), montrer que

$$\sup_{Q_{T,N}} \psi \geqslant \sigma + 5M,$$

et que pour tous $(t,x) \in Q, (t_n, x_j) \in Q_d$ tels que $\beta_\varepsilon(t-t_n, x-x_j) = 0,\ \ \psi(t,x,t_n,x_j) \leqslant 2M$.

(b). En utilisant (10), en déduire qu'il existe $(t_0, x_0, t_{n_0}, x_{j_0}) \in Q_{T,N}$ tel que $\psi(t_0, x_0, t_{n_0}, x_{j_0}) \geqslant \psi(t,x,t_n,x_j)$ pour tout $(t,x,t_n,x_j) \in Q_{T,N}$.

(c). Montrer que $\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) \geqslant 3/5$.

(d). En déduire que

$$\partial_t \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) = -\frac{2}{\varepsilon^2}(t_0 - t_{n_0}),\ \text{ et }\ \partial_x \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) = -\frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - x_{j_0}).$$

En notant $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $f^+ = \max(f,0)$, la solution de viscosité de (HJ) possède les propriétés suivantes :

Théorème 2 (Propriétés de la solution de viscosité de (HJ))**.** *Soit $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, u_0 et v_0 deux fonctions bornées et L-Lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ et u, v les solutions de viscosité de* (HJ) *associées à ces deux conditions initiales. On fixe $t \geqslant 0$. Alors*

i. $\|(u(t,\cdot) - v(t,\cdot))^+\| \leqslant \|(u_0 - v_0)^+\|$.

ii. $\|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\| \leqslant \|u_0 - v_0\|$.

iii. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\inf_{\mathbb{R}} u_0 \leqslant tH(0) + u(t,x) \leqslant \sup_{\mathbb{R}} u_0$.*

iv. *Pour tout $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u(t,x+y) - u(t,x)| \leqslant \sup_{z\in\mathbb{R}} |u_0(z+y) - u_0(z)|$.*

v. *$x \mapsto u(t,x)$ est L-Lipschitzienne et*

$$\forall \tau \geqslant 0,\ \ \|u(t,\cdot) - u(\tau,\cdot)\| \ \leqslant\ |t-\tau| \sup_{|p|\,\leqslant\, L} |H(p)|.$$

On remarquera en particulier que la solution de viscosité de (HJ) n'est a priori pas dérivable, puisqu'elle n'est que L-Lipschitzienne.

Question IV – 16.

(a). Montrer que

$$x \mapsto u(t_0, x) + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right) \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x - x_{j_0}),$$

admet un maximum en x_0, puis en déduire que

$$\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right) |\partial_x \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0})| \leqslant L.$$

où L désigne la constante de Lipschitz de u_0.

(b). On suppose $t_0 > 0$ et on note $L_1 = \max\{|H(p)|, |p| \leqslant L\}$. Montrer que

$$-\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right) \partial_t \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) \leqslant L_1 - \frac{\sigma}{4T}.$$

(c). On suppose que $0 < t_0 < T$. Montrer que

$$\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right) |\partial_t \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0})| \ \leqslant L_1 + \frac{\sigma}{4T}.$$

(d). En utilisant la question IV -15, en déduire que

$$|x_0 - x_{j_0}| \leqslant \varepsilon^2 \frac{L}{10M + \sigma},$$

que si $t_0 = T$ alors

$$|t_0 - t_{n_0}| \leqslant \varepsilon^2 \frac{L_1 - \frac{\sigma}{4T}}{10M + \sigma},$$

et enfin que si $0 < t_0 < T$ on a

$$|t_0 - t_{n_0}| \leqslant \varepsilon^2 \frac{L_1 + \frac{\sigma}{4T}}{10M + \sigma}.$$

Dans la suite, on fixe

$$\varepsilon = (\Delta t + \Delta x)^{1/4},$$

et on poursuit la preuve de la convergence du schéma (S) en traitant séparément les cas $(t_0, t_{n_0} > 0)$, $(t_0 \geqslant 0,$ $t_{n_0} = 0)$ et $(t_0 = 0,\ t_{n_0} > 0)$.

IV-A Cas où $t_0 > 0$, $t_{n_0} > 0$

Question IV – 17.

(a). Montrer que (t_0, x_0) réalise le maximum sur Q_T de

$$(t,x) \mapsto u(t,x) - \frac{\sigma}{4T}t + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(t - t_{n_0}, x - x_{j_0}).$$

(b). Déduire à l'aide du théorème 1 que

$$\frac{\sigma}{4T} - \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\partial_t\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) + H\left(-\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\partial_x\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0})\right) \leqslant 0.$$

Question IV – 18.

(a). Montrer que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$U_j^n \geqslant U_{j_0}^{n_0} + \frac{\sigma}{4T}(n_0 - n)\Delta t - \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\left(\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_n, x_0 - x_j)\right).$$

(b). Montrer qu'il existe une constante C_1 indépendante de ε telle que pour tout $k \in [\![-p, q]\!]$,

$$\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\left|\frac{\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+k+1}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+k})}{\Delta x}\right| \leqslant L + C_1\,\frac{\Delta t + \Delta x}{\varepsilon^2}.$$

En déduire que si Δt est assez petit,

$$\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\left|\frac{\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+k+1}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+k})}{\Delta x}\right| \leqslant 1 + L.$$

(c). En utilisant notamment les questions III -7 et III -8, montrer que

$$\begin{aligned}
U_{j_0}^{n_0} \geqslant U_{j_0}^{n_0} &+ \frac{\sigma}{4T}\Delta t - \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\Big(\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0})\Big) \\
&- \Delta t g\left(\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\frac{\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0-p+1}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0-p})}{\Delta x},\right. \\
&\qquad \left. \ldots, \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\frac{\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+q+1}) - \beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0} + \Delta t, x_0 - x_{j_0+q})}{\Delta x}\right).
\end{aligned}$$

(d). Montrer qu'il existe une constante C_2, indépendante de ε telle que

$$\frac{\sigma}{4T} \leqslant -\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\partial_t\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) + H\left(-\left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\partial_x\beta_\varepsilon(t_0 - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0})\right) + C_2\,\frac{\Delta t + \Delta x}{\varepsilon^2}.$$

(e). En déduire qu'il existe une constante C_3, indépendante de ε telle que

$$\sigma \leqslant C_3\,(\Delta t)^{\frac{1}{2}}.$$

IV-B Cas où $t_0 = 0$ ou $t_{n_0} = 0$

Question IV – 19. On suppose que $t_0 \geqslant 0$ et $t_{n_0} = 0$.

(a). Montrer que

$$5M + \sigma \leqslant |u(t_0, x_0) - u(t_0, x_{j_0})| + |u(t_0, x_{j_0}) - u(0, x_{j_0})| + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(t_0, x_0 - x_{j_0}).$$

(b). En déduire qu'il existe une constante C_4 telle que

$$\sigma \leqslant C_4\,(\Delta t)^{1/2}.$$

Question IV – 20. On suppose que $t_0 = 0$ et $t_{n_0} > 0$.

(a). Montrer que

$$5M + \sigma \leqslant 5M + \frac{\sigma}{2} + L|x_0 - x_{j_0}| + \|U^0 - \mathbf{G}^{n_0}(U^0)\|_\infty,$$

et en déduire que

$$\sigma \leqslant 2L|x_0 - x_{j_0}| + 2Kt_{n_0}.$$

(b). Montrer que

$$-U_{j_0}^{n_0} - \frac{\sigma}{4T}t_{n_0} + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(-t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}) \geqslant -U_{j_0}^{n_0-1} - \frac{\sigma}{4T}(t_{n_0} - \Delta t) + \left(5M + \frac{\sigma}{2}\right)\beta_\varepsilon(\Delta t - t_{n_0}, x_0 - x_{j_0}),$$

et en déduire que si Δt est assez petit alors

$$\frac{5M + \sigma/2}{\varepsilon^2}\left(t_{n_0}^2 - (t_{n_0} - \Delta t)^2\right) \leqslant K\Delta t.$$

(c). En déduire qu'il existe une constante C_5 telle que

$$\sigma \leqslant C_5 \ (\Delta t)^{1/2}.$$

IV-C Conclusion

Les questions précédentes ont permis de montrer le résultat suivant :

Théorème 3. *On suppose $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continu, u_0 bornée et L-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, $\Lambda = \Delta t/\Delta x$ et N sont fixés. Si le schéma* (S) *est monotone sur* $[-(L+1), (L+1)]$, *consistant avec* (HJ), *tel que le Hamiltonien numérique g soit localement Lipschitzien, et initialisé avec $U_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. En notant u la solution de viscosité de* (HJ), *alors il existe une constante C qui ne dépend que de* $\sup|u_0|$, *L, g et T telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$,*

$$|U_j^n - u(t_n, x_j)| \leqslant c\sqrt{\Delta t}.$$

Question IV – 21. Comparer l'ordre de convergence du schéma (S) à l'ordre de consistance établi en question I -1. Commenter.

V - Exemples

Question V – 22.

(a). On suppose que H est croissant, de classe $\mathcal{C}^1$, et vérifie les hypothèses du théorème 3. On considère le schéma initialisé par $U_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout j, et défini pour tout $j \in \mathbb{Z}$ par

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \Delta t H\left(\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}\right).$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que si $C\Delta t \leqslant \Delta x$, alors ce schéma converge vers la solution de viscosité de (HJ).

(b). On suppose que H est décroissant, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie les hypothèses du théorème 3. On considère le schéma initialisé par $U_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout j, et défini pour tout $j \in \mathbb{Z}$ par

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \Delta t H\left(\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}\right).$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que si $C\Delta t \leqslant \Delta x$, alors ce schéma converge vers la solution de viscosité de (HJ).

(c). On considère le Hamiltonien $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $H(p) = p^2$ pour tout $p \in \mathbb{R}$. Proposer un schéma qui approche correctement la solution de viscosité de (HJ).

FIN DE L'EPREUVE