Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay
Ecole Normale Supérieure de Rennes

SECOND CONCOURS

ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2020

Épreuve de MATHEMATIQUES

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les deux problèmes (A et B) doivent être considérés comme indépendants. En particulier, les résultats prouvés dans l'un d'entre eux ne peuvent être utilisés dans l'autre. Libre choix est laissé au candidat de les traiter ou non dans l'ordre, mais il est attendu que les deux problèmes soient traités.

PROBLÈME A

Notations et rappels

- Soit $n \geq 1$ un entier. On munit $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) de la norme euclidienne (respectivement hermitienne) usuelle notée $|\ |$.
- Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- Soient $M_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n sur $\mathbb{K}$ muni de la topologie induite par la norme $\|\ \|$ définie par $\|M\| = \sup\{|Mu| \mid u \in \mathbb{K}^n,\ |u| \leq 1\}$ pour tout $M \in \mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{K})$. On écrira I pour la matrice identité de $GL_n(\mathbb{K})$.
- On notera ${}^tM$ la transposée d'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.
- On rappelle qu'un sous-ensemble H d'un espace topologique X est appelé *discret* si, pour tout $x \in H$, il existe un voisinage V de x tel que $V \cap H = \{x\}$. Il est dit *connexe*, s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints. On munira par ailleurs tout sous-ensemble de X de la topologie induite.
- Enfin on appellera matrice exponentielle de M, notée $\exp(M)$, la matrice suivante :

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!}.$$

I. Préliminaires :

A.1. Montrer que $\exp(M)$ est bien définie pour toute matrice M (c'est à dire que la série est convergente) puis que l'application $M \mapsto \exp(M)$ est une application continue de $M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$.

A.2. (a) Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent entre elles.
Montrer l'égalité $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ et donner une expression de $\exp(kA)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\exp(M) \in GL_n(\mathbb{K})$.

A.3. (a) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, montrer que $M \mapsto M^i$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $M_n(\mathbb{K})$ et donner sa différentielle.

(b) Montrer que $M \mapsto \exp(M)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $M_n(\mathbb{K})$.

(c) Montrer que cette différentielle en 0 est l'application identité sur $M_n(\mathbb{K})$.

A.4. Déduire des questions précédentes qu'il existe un ouvert U de la matrice nulle dans $M_n(\mathbb{K})$ tel que la restriction de exp à U soit un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme sur un ouvert V de I dans $GL_n(\mathbb{K})$. On notera $\log : V \to M_n(\mathbb{K})$ l'application inverse de exp sur V. Donner la valeur de la différentielle de log en la matrice identité.

A.5. Soient M et N deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que tout réel t positif suffisamment petit, on a

$$\log\Big(\exp\big(tM\big)\exp(tN)\Big) = \Big(t(M+N) + t\eta(t)\Big)$$

où $\|\eta(t)\| \to 0$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures.

(b) En déduire que

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{M}{k}\right)\exp\left(\frac{N}{k}\right)\right)^k = \exp\Big(M+N\Big).$$

II. Sous-groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ et topologie

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$. On munit $GL_n(\mathbb{K})$ et ses sous-groupes de la topologie induite par $M_n(\mathbb{K})$.

A.6. Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Démontrer que l'application $\ell_M : GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ donnée par $\ell_M(N) = MN$ pour tout $N \in GL_n(\mathbb{K})$ est un homéomorphisme.

A.7. (a) Démontrer que si G est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$, alors G est aussi fermé dans $M_n(\mathbb{K})$.
Indication : On pourra montrer que le complémentaire G^c de G vérifie $G^c = \bigcup_{M \in GL_n(\mathbb{K}) \setminus G} \ell_M(G)$.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

A.8. (a) Montrer que pour tout $R \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $\|R\| < 1$, on a $(I - R) \in GL_n(\mathbb{K})$ et exprimer $(I-R)^{-1}$ comme une série convergente en R.

(b) En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$ et que $M \mapsto M^{-1}$ est un homéomorphisme de $GL_n(\mathbb{K})$.

A.9. Soit V un voisinage ouvert de I dans G tel que $V^{-1} = V$ où $V^{-1} = \{ M^{-1} \mid M \in V\}$.

(a) Montrer l'existence d'un tel ouvert V.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $V^n = \{ M_1 \cdots M_n \mid M_i \in V, \forall 1 \leq i \leq n \}$, alors V^n est ouvert.

(c) On note $G_0 = \bigcup_{n \geq 1} V^n$. Montrer que G_0 est un sous-groupe ouvert de G et que $G_0 = G$ lorsque G est connexe.

A.10. On suppose maintenant que G connexe et on note Z le centre de G. Pour tout $N \in G$, on considère l'application $\psi_N : G \to G$ définie par $\psi_N(M) = N^{-1}M^{-1}NM$.

(a) Vérifier que ψ_N est continue.

(b) Soit H un sous-groupe distingué et discret de G. Montrer que H est contenu dans Z.
Indication : On pourra commencer par vérifier que pour tous N et N' dans H, on a $\psi_N(G) \subset H$ et $\psi_N^{-1}(\{N'\})$ ouvert dans G.

(c) On suppose que Z est discret. Montrer que pour tout $N \in G$, si $\psi_N(G) \subset Z$ alors $N \in Z$. En déduire que le centre de G/Z est réduit à son élément neutre.

III. Cas des sous-groupes fermés

On suppose maintenant que le sous-groupe $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ est fermé dans $GL_n(\mathbb{K})$.

A.11. Montrer que l'ensemble

$$L_G = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tM) \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel *réel* de $M_n(\mathbb{K})$.

A.12. Soit $D_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble des matrices diagonales inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$.

(b) Identifier $L_{D_n(\mathbb{K})}$.

A.13. Soit S^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1.

(a) Démontrer que S^1 est un sous-groupe fermé de $GL_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ et identifier le sous-espace vectoriel L_{S^1}.

(b) Donner un isomorphisme de groupes qui soit de plus un homéomorphisme de S^1 dans un sous-groupe fermé de $GL_2(\mathbb{R})$.

A.14. Soit $O_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^tMM = I\}$.

(a) Démontrer que $O_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$.

(b) Démontrer que si $M \in L_{O_n(\mathbb{K})}$, alors M est antisymétrique : ${}^tM = -M$. Identifier $L_{O_n(\mathbb{K})}$.

A.15. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Est-ce que L_G est nécessairement un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel ?

PROBLÈME B

Notations et rappels

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $|x|$ la norme euclidienne canonique d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$.
- Pour n et k dans $\mathbb{N}^*$, on note $M_{n,k}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles de taille $n \times k$, muni de la norme d'opérateur usuelle

$$\|M\| = \sup\left\{|Mx|,\ x \in \mathbb{R}^k,\ |x| = 1\right\}, \quad M \in M_{n,k}(\mathbb{R}).$$

  L'espace des matrices carrés de taille n sera simplement noté $M_n(\mathbb{R})$, et les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront identifiés à des matrices colonnes de taille $n \times 1$.
- On notera ${}^tM$ la transposée d'une matrice réelle M de taille quelconque.
- Pour T réel strictement positif, et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de la norme sup :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|,\ t \in [0,T]\}, \quad f \in \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n).$$

  On notera également $\|f\|_\infty$ la norme sup d'une fonction $f : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ qui est seulement bornée.
- On note également $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des applications mesurables f définies sur $[0,T]$ à un ensemble de mesure nulle près, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et intégrables pour la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire, telles que $\int_0^T |f(t)|dt < +\infty$. Il est muni de la norme usuelle

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^T |f(t)|dt.$$

- **Important :** on rappelle que $\mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. Ce résultat pourra être utilisé sans démonstration.
- On rappelle que l'exponentielle matricielle $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est la limite de la série de fonctions matricielles localement uniformément convergente

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!}, \quad M \in M_n(\mathbb{R}).$$

  De plus, $M\exp(M) = \exp(M)M$, $\exp(0) = I_n$ la matrice identité, et $\exp(-M) = \exp(M)^{-1}$. Ces résultats pourront être utilisés sans démonstration dans ce problème.
- On rappelle que pour une matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$ fixée, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, avec pour dérivée

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA).$$

  Ce résultat pourra être utilisé sans démonstration dans ce problème.
- Dans toute la suite, on fixe k et n des entiers naturels strictement positifs, ainsi que des matrices A dans $M_n(\mathbb{R})$ et B dans $M_{n,k}(\mathbb{R})$. On choisit également un réel strictement positif T et un *point initial* x_0 dans $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'une fonction continue $x \in \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ est une solution du *système de contrôle linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

si, pour tout t dans $[0,T]$,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (Ax(s) + Bu(s))ds. \tag{2}$$

Le but de ce problème est d'étudier certains comportements possibles de cette solution en fonction du choix du *contrôle* u dans $L^1([0,T],\mathbb{R}^k)$.

I : Existence et unicité des solutions

B.1. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au problème (1) ?

B.2. Soit $f \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, et $g : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^T \mathbb{1}_{[0,t]}(s) f(s)ds, \quad t \in [0,T],$$

où $\mathbb{1}_{[0,t]}$ vaut 1 sur $[0,t]$ et 0 en dehors de $[0,t]$.
Montrer que g est continue.

B.3. **(Lemme de Grönwall)** Soient M et K deux réels positifs et $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue positive tels que

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq M + K \int_0^t \phi(s)ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq Me^{tK}.$$

B.4. En déduire que pour tout contrôle u dans $L^1([0,T],\mathbb{R}^k)$, si (1) admet une solution sur $[0,T]$, alors cette solution est unique.

B.5. Dans cette question, on fixe un contrôle u que l'on suppose dans $\mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^k)$. En considérant la fonction

$$x(t) = e^{tA}\lambda(t), \; t \in [0,T],$$

avec $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable, montrer que (1) admet bien une solution sur $[0,T]$, et en donner une expression en fonction de A, B, u et x_0. On note $x_u \in \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ cette unique solution.

B.6. Pour tout $(x,u) \in \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n) \times L^1([0,T],\mathbb{R}^k)$, et $t \in [0,T]$, on définit

$$F(x,u)(t) = x(t) - x_0 - \int_0^t (Ax(s) + Bu(s))ds, \quad t \in [0,T].$$

(a) Montrer que $F(x,u)(t)$ est bien définie pour tous $x \in \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$, $u \in L^1([0,T],\mathbb{R}^k)$, et tout réel $t \in [0,T]$, puis que $t \mapsto F(x,u)(t)$ est continue en t.
On note alors $F(x,u)$ l'application $t \in [0,T] \mapsto F(x,u)(t) \in \mathbb{R}^n$, de sorte que F est l'application

$$\begin{aligned} F : \quad \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n) \times L^1([0,T],\mathbb{R}^k) &\to \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n) \\ (x,u) &\mapsto F(x,u) \end{aligned}$$

(b) Montrer que F est lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe $K > 0$ telle que pour tout (x,u) et tout (y,v) dans $\mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n) \times L^1([0,T],\mathbb{R}^k)$ on ait

$$\|F(x,u) - F(y,v)\|_\infty \leq K\left(\|x-y\|_\infty + \|u-v\|_{L^1}\right).$$

B.7. (a) Trouver une application $\Phi : L^1([0,T],\mathbb{R}^k) \to \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

i. pour tout contrôle u dans $\mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^k)$, $\Phi(u) = x_u(\cdot)$, c'est-à-dire que la fonction $\Phi(u) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ est l'unique solution de (1),

ii. Φ est continue.

Indication : on pourra utiliser la question B.5.

(b) Montrer qu'alors $F(\Phi(u), u) = 0$ pour tout contrôle u, d'abord dans $\mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^k)$, puis dans $L^1([0,T],\mathbb{R}^k)$.

(c) En déduire que pour tout contrôle u dans $L^1([0,T],\mathbb{R}^k)$, (1) admet une unique solution sur $[0,T]$, et exprimer cette solution en fonction de A, B, u et x_0. On note $x_u \in \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ cette unique solution.

II : Ensemble accessible

On définit maintenant, pour t dans $[0,T]$, l'ensemble des points accessibles en temps t de (1) par

$$\mathrm{Acc}(t) := \{\, x_u(t) \mid u \in L^1([0,T],\mathbb{R}^k),\ x_u(\cdot) \text{ solution de (1) pour le contrôle } u \,\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points x_1 tels qu'il existe un contrôle u pour lequel la solution de (1) emmène le point initial x_0 en x_1 en temps t.

B.8. On définit l'application $\Psi : L^1([0,T],\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $u \in L^1([0,T],\mathbb{R}^k)$

$$\Psi(u) = \exp(TA)\int_0^T \exp(-tA)Bu(t)dt.$$

(a) Montrer que Ψ est une application linéaire.

(b) Montrer que $\mathrm{Acc}(T, x_0) = \mathbb{R}^n$ si et seulement si Ψ est surjective.

B.9. On suppose ici que Ψ n'est pas surjective.

(a) Montrer qu'il existe v dans $\mathbb{R}^n$ qui est non nul et orthogonal à $\mathrm{Im}(\Psi)$.
On fixe un tel v pour le reste de la question B.9.

(b) En déduire que pour tout $t \in [0,T]$, ${}^t v \exp(tA)B = 0$.

(c) Montrer qu'alors, ${}^t vB = {}^t vAB = \cdots = {}^t vA^{n-1}B = 0$.

B.10. Supposons réciproquement qu'il existe v dans $\mathbb{R}^n$, un vecteur non nul tel que ${}^t vB = {}^t vAB = \cdots = {}^t vA^{n-1}B = 0$.

(a) Montrer que pour tout polynôme P à coefficients réels, ${}^t vP(A)B = 0$.

(b) En déduire que pour tout t dans $[0,T]$, ${}^t v\exp(tA)B = 0$.

(c) Montrer que Ψ n'est pas surjective.

B.11. En déduire que $\mathrm{Acc}(T) = \mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice bloc $C = (B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$ dans $M_{n,nk}(\mathbb{R})$ est de rang n.

B.12. Supposons que le rang de C vérifie $\mathrm{rg}(C) = n$. Donner, sans preuve, les ensembles $\mathrm{Acc}(t)$, pour tout $t \in]0,T]$.