ECOLE NORMALE SUPERIEURE PARIS SACLAY
ECOLE NORMALE SUPERIEURE RENNES

CONCOURS D'ADMISSION 2024

MARDI 27 FEVRIER 2024
13h00 - 18h00

Concours 2A MATHEMATIQUES

Epreuve n° 2

MATHEMATIQUES

Durée : 5 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, qui compteront chacun pour une part égale de la note totale. Merci de veiller à ***traiter chaque problème sur une copie séparée****, en identifiant bien le problème à laquelle elle correspond.*

Le sujet comprend 7 pages.

⋆ ⋆ ⋆

Problème 1 – Algèbre

Décomposition de Bruhat et espace de drapeaux

Notations et rappels

On travaille sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et pour tout le problème, on fixe un entier $n \geqslant 2$.

— On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de taille n et $T^+ \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles.

— On note I_n la matrice identité et $E_{i,j}$ la matrice dont l'unique coefficient non nul est 1 en i-ème ligne et j-ème colonne. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$ et $D_i(\lambda)$ la matrice $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$. Pour M une matrice, on note $L_i(M)$ sa i-ème ligne et $C_j(M)$ sa j-ème colonne.

— On note Σ_n le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, et pour $\sigma \in \Sigma_n$, on note P_σ la matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient en i-ème ligne et j-ème colonne vaut $\delta_{i,\sigma(j)}$. On rappelle que $\delta_{k,\ell}$ vaut 1 si $k = \ell$ et 0 sinon.

Rappels sur les actions de groupes Soit G un groupe de neutre e et X un ensemble.

— On dit que G agit sur X s'il existe une application

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

vérifiant

$$\forall x \in X, e \cdot x = x \quad \text{et} \quad \forall (g, g') \in G^2, \forall x \in X, (gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x).$$

— On appelle *orbite* d'un point x de X l'ensemble $\{g \cdot x \mid g \in G\}$.

— On appelle *stabilisateur* d'un élément x de X le sous-groupe

$$\mathrm{Stab}_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

— On dit que l'action est *transitive* si pour tout $(x, y) \in X^2$ il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$.

I - Décomposition de Bruhat

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée de taille n. Le but de cette partie est de montrer que si la matrice A est inversible, elle peut s'écrire comme produit d'une matrice de T^+, d'une matrice de permutation et d'une deuxième matrice de T^+.

I.1. Soient $i \neq j$ dans $\{1,\dots,n\}$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer que les lignes de la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ vérifient les relations suivantes :

$$L_i(T_{i,j}(\lambda)A) = L_i(A) + \lambda L_j(A),$$

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}\backslash\{i\}, L_k(T_{i,j}(\lambda)A) = L_k(A).$$

I.2. Soient i et j dans $\{1,\dots,n\}$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{gathered} L_i(D_i(\lambda)A) = \lambda L_i(A), \\ C_j(AT_{i,j}(\lambda)) = C_j(A) + \lambda C_i(A), \\ C_i(AD_i(\lambda)) = \lambda C_i(A). \end{gathered}$$

On admettra de plus que

$$\begin{gathered} \forall k \in \{1,\dots,n\}\backslash\{i\}, L_k(D_i(\lambda)A) = L_k(A), \\ \forall k \in \{1,\dots,n\}\backslash\{j\}, C_k(AT_{i,j}(\lambda)) = C_k(A), \\ \forall k \in \{1,\dots,n\}\backslash\{i\}, C_k(AD_i(\lambda)) = C_k(A). \end{gathered}$$

I.3. Démontrer que l'application de Σ_n vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui envoie σ sur P_σ est un morphisme de groupes.

I.4. Décrire les matrices $P_\tau A$ et AP_τ en utilisant les lignes ou les colonnes de la matrice A, où τ désigne une transposition dans Σ_n, puis $P_\sigma A$ et AP_σ en utilisant les lignes ou les colonnes de la matrice A, où σ est une permutation dans Σ_n.

On suppose pour toute la suite de la partie I que la matrice A est inversible.

I.5. Montrer que l'ensemble $\{i \in \{1,\dots,n\} \mid a_{i,1} \neq 0\}$ est non vide. On appelle i_1 son maximum.

Montrer alors qu'il existe des matrices triangulaires supérieures inversibles T_g et T_d telles que $T_gAT_d = B$ où B est de la forme suivante si $i_1 < n$

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

où le coefficient 1 est sur la i_1-ème ligne et où les étoiles représentent des scalaires ; et si $i_1 = n$, la matrice B est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

I.6. Pour la matrice B obtenue à la question précédente, montrer qu'il existe $i_2 \in \{1, \dots, n\}$, avec i_2 différent de i_1, et des matrices triangulaires supérieures inversibles T'_g et T'_d telles que $T'_g B T'_d = C$ où C est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \text{ si } i_1 > i_2 \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & \dots & * \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \text{ si } i_1 < i_2.$$

où les coefficients 1 sont sur les i_1-ème et i_2-ème lignes et où les étoiles représentent des scalaires.

I.7. Montrer qu'il existe des matrices triangulaires supérieures inversibles T_g et T_d telles que $T_g A T_d = P_\sigma$ où σ est une permutation.

I.8. En déduire que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} T^+ P_\sigma T^+.$$

I.9. Soient T et T' dans T^+, soient σ et σ' dans Σ_n. On suppose que $TP_\sigma = P_{\sigma'} T'$. Montrer que $\sigma = \sigma'$.
Indication : On pourra observer que pour toute matrice $T = (t_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in T^+$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$k = \max\{i \in \{1, \dots, n\} \mid t_{ik} \neq 0\} = \min\{j \in \{1, \dots, n\} \mid t_{kj} \neq 0\}.$$

I.10. En déduire que pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donnée, il existe un unique σ tel que $A = TP_\sigma T'$ où T et T' sont dans T^+. Ces T et T' sont-ils uniques ?

II - Drapeaux

On appelle drapeau (complet) de $\mathbb{K}^n$ une suite finie de sous-espaces vectoriels

$$\{0\} \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{n-1} \subset E_n = \mathbb{K}^n$$

où toutes les inclusions sont strictes.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{K}^n$.

II.1. Soit $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ un drapeau. Prouver que pour tout i dans $\{1,\ldots,n\}$, $\dim E_i = i$.

II.2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit transitivement sur $\mathcal{D}$ par la formule

$$M \cdot (E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}} = (\{Mv \mid v \in E_i\})_{i\in\{1,\ldots,n\}}$$

où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ est un drapeau.

En déduire le nombre d'orbites de cette action.

On s'intéresse maintenant à compter les orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

On appelle D_0 le drapeau défini par

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, E_i = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_i)\,,$$

où $(e_1,\cdots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

II.3. Montrer que le stabilisateur de D_0 (pour l'action de la question II.2) est T^+.

II.4. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par $A\mathcal{R}B \iff A^{-1}B \in T^+$ est une relation d'équivalence, puis que le quotient, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+$, est en bijection avec $\mathcal{D}$ via l'application ϕ envoyant une classe $\overline{M}$ sur $M \cdot D_0$ (on commencera par montrer que ϕ est bien définie).

On considère maintenant l'action diagonale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+ \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+$ définie par $M \cdot (\overline{A},\overline{B}) = (\overline{MA},\overline{MB})$. On ne démontrera pas que c'est bien une action.

II.5. Pour A et B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, montrer grâce à la partie I qu'il existe $\sigma \in \Sigma_n$ et $T \in T^+$ tels que $(\overline{A},\overline{B}) = AT \cdot (\overline{I_n},\overline{P_\sigma})$, et que σ est unique.

II.6. En déduire le nombre d'orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+ \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+$.

Remarque : Cette action correspond bijectivement via ϕ à l'action diagonale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. La dernière question dénombre donc le nombre d'orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

⋆ ⋆ ⋆

Problème 2 – Analyse

Opérateur de Volterra et opérateurs compacts

Notations et rappels

On rappelle qu'un espace de pré-hilbertien complexe est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire hermitien $(v, w) \in H^2 \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire tel que :

- pour tout w dans H, l'application $v \in H \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$ est linéaire.
- pour tous v, w de H, $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$. En particulier, $\langle v, v\rangle$ est un réel.
- pour tout v dans H, $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $v = 0$. L'application $v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$ est alors une norme (la norme associée) sur H.

Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien qui est complet pour la norme associée.

On considère dans ce problème un espace de Hilbert complexe $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$**, de dimension infinie**, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On note respectivement $B_1(H)$ et $S_1(H)$ la boule unité et la sphère unité, toutes deux centrées en 0.

On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires continus de H, muni de la norme d'opérateur

$$|||T||| = \sup_{v \in H\setminus\{0\}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \sup_{v \in S_1(H)} \|Tv\|.$$

Un nombre complexe λ est une valeur propre de T si il existe un v non nul de H, appelé alors un vecteur propre, tel que $Tv = \lambda v$.

On rappelle les résultats suivants, qui pourront être utilisés sans démonstration :

- **Théorème de représentation de Riesz :** pour toute forme linéaire continue $\phi : H \to \mathbb{C}$, il existe un unique vecteur w tel que $\phi = \langle\cdot, w\rangle$.
- On note $CPM([0,1],\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $[0,1] \to \mathbb{C}$ constantes par morceaux. $CPM([0,1],\mathbb{C})$ est dense dans $L^2([0,1],\mathbb{C})$.

Cas particuliers :

On note $L^2([0,1],\mathbb{C})$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions boréliennes f (à equivalence *p.p.* près) telles que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty$ pour lequel $\langle f, g\rangle = \int f(t)\overline{g}(t)dt$.

On note enfin $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty$ pour lequel $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v}_n$.

I - Préliminaire

Soit T dans $\mathcal{L}(H)$.

I.1. Montrer qu'on a $|||T||| = \sup_{v,w \in S_1(H)} |\langle Tv, w\rangle|$

I.2. a) Soit w dans H. Montrer qu'il existe un unique vecteur, qu'on notera T^*w, tel que pour tout v dans H, $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$. On peut ainsi considérer l'application $T^* : w \in H \mapsto T^*w \in H$.

b) Montrer que T^* est dans $\mathcal{L}(H)$, et que $|||T^*||| \leqslant |||T|||$.

c) Montrer que $(T^*)^* = T$. En déduire que $|||T^*||| = |||T|||$. On appelle T^* l'*adjoint de* T.

On dit que

- T est auto-adjoint si $T^* = T$.
- T est de rang fini si $T(H)$ est de dimension finie.
- T est compact si, pour toute suite bornée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire de $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente.

On note $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des $T \in \mathcal{L}(H)$ compacts.

I.3. On suppose dans cette question que T est auto-adjoint.

a) Soient v, w dans H. Calculer la partie réelle de $\langle Tv, w\rangle$ en fonction de $\langle T(v+w), v+w\rangle$ et $\langle T(v-w), v-w\rangle$.

b) En déduire que $|||T||| = \sup_{v \in S_1(H)} |\langle Tv, v\rangle|$.

c) Montrer que les valeurs propres de T sont réelles, et que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

I.4. Montrer que si T est de rang fini, alors il est compact.

I.5. Montrer que $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$, c'est-à-dire

$$\forall T \in \mathcal{K}(H),\ \forall B \in \mathcal{L}(H), \quad TB \in \mathcal{K}(H) \text{ et } BT \in \mathcal{K}(H).$$

II - Cas discret : étude d'une famille d'endomorphismes sur $\ell^2(\mathbb{N})$

II.1. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Montrer qu'aucune sous-suite de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est de Cauchy. En déduire que la boule unité de H n'est pas compacte.

Jusqu'à la fin de la partie II, $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$.

II.2. Montrer que pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H, la suite $(\alpha_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également dans H.

On peut ainsi définir l'application $T : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \mapsto (\alpha_n u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$.

II.3. Montrer que T appartient à $\mathcal{L}(H)$, c'est-à-dire que c'est un endomorphisme linéaire continu de H.

II.4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que T soit de rang fini.

II.5. Montrer que T est compact si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

III - Cas continu : étude d'un endomorphisme de $L^2([0,1],\mathbb{C})$

Dans cette partie, $H = L^2([0,1],\mathbb{C})$. Pour f dans H, on définit $Tf : [0,1] \to \mathbb{C}$ par

$$(Tf)(x) = Tf(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

III.1. a) Montrer que pour $f \in H$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a $|Tf(x)| \leqslant \sqrt{x}\|f\|$. En déduire que la fonction Tf appartient à H.

b) Montrer que T est un endomorphisme continu de H, avec norme d'opérateur $|||T||| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

III.2. Montrer que pour tout f dans H, Tf est une fonction continue sur $[0,1]$.

III.3. Montrer que T n'a pas de valeur propre.

III.4. On va montrer que $T \in \mathcal{K}(H)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite bornée de H.

a) Montrer que pour tout x dans $[0,1]$, on peut extraire de $(Tf_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans $\mathbb{C}$.

b) En déduire qu'il existe une sous-suite $(Tf_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

c) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout k entier positif, et pour tous x, y dans $[0,1]$, $|Tf_{n_k}(y) - Tf_{n_k}(x)| \leqslant M\sqrt{|x-y|}$.

d) Montrer que la suite $(Tf_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.

e) Conclure.

III.5. Montrer que l'adjoint T^* de T est donné par $T^*f : x \mapsto \int_x^1 f(t)dt$.

III.6. On note $A = T^*T$. Montrer que A est un endomorphisme compact et auto-adjoint.

⋆ ⋆ ⋆